1 er Parcial Matemática 51 CBC - 1 C24 - Ma 21 / 5 / 24 - Sede Ramos

E- Tema 2

1. Sea f la función lineal cuyo gráfico pasa por los puntos $(1,4)$ y $(2,1)$.
Escribir el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) < 1\}$ como intervalo o unión de intervalos.

2. Hallar los ceros de la función cuadrática f cuyo gráfico tiene vértice en $(2,25)$ y pasa por $(1,24)$.

3. Sea $f(x) = \dfrac{x+6}{x-8}$. Hallar f^{-1} y el dominio de f^{-1}.

4. Sean $f(x) = \ln(x-7)$ y $g(x) = 2x-5$. Hallar $h(x) = (f \circ g)(x)$ y el conjunto de ceros de h.

----

1. - f es la función lineal que pasa por los puntos $(1,\ 4)$ y $(2,\ 1)$:

Escribir como intervalo o unión de intervalos $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) < 1\}$

----

calculamos la f lineal :

$f(x) = m x + b$,

con $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1-4}{2-1} = \dfrac{-3}{1} = -3$

entonces, $f(x) = -3x + b$

reemplazamos las coordenadas de uno de los puntos para obtener b :

$4 = -3.1 + b \implies 4 + 3 = b \implies b = 7$

$f(x) = -3x + 7$

$f(x) = -3x + 7$ es la única función lineal que pasa por los puntos $(1,\ 4)$ y $(2,\ 1)$

Para obtener el conjunto A, reemplazamos la f (x) obtenida en la definición de A :

$f(x) < 1 \implies -3x + 7 < 1 \implies -3x < 1 - 7 \implies -3x < -6 \implies x > \dfrac{-6}{-3}$

$\implies x > 2$

Por lo tanto, el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) < 1\} = (2,\ +\infty)$

----

2. - Hallar los ceros, C^0, de la f. cuadrática (de grado 2), cuyo Gráfico tiene vértice V = (2, 25) y pasa por (1, 24)

Con V = (2, 25) usamos la forma canónica de f : $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

$f(x) = a(x-2)^2 + 25$

Dado que el punto (1, 24) pertenece al Gráf (f),
las coordenadas del punto deben satisfacer la fórmula de f :

$24 = a(1-2)^2 + 25$

$24 = a \cdot 1 + 25$

$24 - 25 = a \implies a = -1$

La función cuadrática es $f(x) = -(x-2)^2 + 25$

Para hallar los ceros o raíces, igualamos a 0 :

$0 = -(x-2)^2 + 25 \implies (x-2)^2 = 25$

aplicamos raíz cuadrada en ambos miembros :

$\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{25} \implies |x-2| = 5$

ecuación con módulo que tiene como soluciones $x - 2 = 5$ ó $x - 2 = -5$

es decir $x = 7$ ó $x = -3$

Por lo tanto el conjunto de ceros C^0,

de la f. cuadrática $f(x) = -(x-2)^2 + 25$, es :

$C^0 = \{-3, 7\}$

Otra forma de calcular los ceros :

si desarrollamos $f(x) = -(x-2)^2 + 25 = -(x^2 - 4x + 4) + 25$

$f(x) = -x^2 + 4x - 4 + 25 = -x^2 + 4x + 21$

Para hallar los ceros o raíces, igualamos a 0 :

$-x^2 + 4x + 21 = 0$

y usamos la fórmula de obtención de las raíces :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a.c}}{2\,a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.\,(-1)\,.21}}{2.\,(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{-2} = \frac{-4 \pm 10}{-2}$$

$$x_{1} = \frac{-4 + 10}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \quad ó \quad x_{2} = \frac{-4 - 10}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7$$

Por lo tanto el conjunto de ceros C^0,

de la f. cuadrática $f(x) = -(x-2)^2 + 25 = -x^2 + 4x + 21$, es :

$C^0 = \{-3, 7\}$

----

3. - Sean $f(x) = \frac{x+6}{x-8}$, Buscamos su invesa f^{-1} y Dom (f^{-1})

Para calcular f^{-1} ponemos $y = f(x)$ para despejar x :

$$y = \frac{x+6}{x-8} \quad \Longrightarrow \quad y\,(x-8) = x + 6 \quad \Longrightarrow \quad yx - 8\,y = x + 6$$

juntamos las x de un lado para sacar factor común :

$$yx - x = 8\,y + 6 \quad \Longrightarrow \quad x\,(y-1) = 8\,y + 6$$

$$x = \frac{8\,y + 6}{y - 1}$$

intercambiamos los nombres de las variables x e y :

$$y = \frac{8\,x + 6}{x - 1} = f^{-1}(x)$$

Calculamos el dominio : para que $f(x)$ esté definida deberá ser $x - 1 \neq 0$

es decir : $x \neq 1$, entonces :

$\mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R} - \{1\}$

Por lo tanto, la función inversa de $f(x) = \dfrac{x+6}{x-8}$ es :

$f^{-1}(x) = \dfrac{8x+6}{x-1}$ y su dominio es :

$\mathrm{Dom}\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R} - \{1\}$

----

4. - Sea $f(x) = \ln(x-7)$ y $g(x) = 2x - 5$

Hallar $h(x) = f \circ g(x)$ y el C^0 de h

Para calcular $h(x) = f \circ g(x)$:

$h(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) = \ln(g(x) - 7) = \ln\left(2x - 5 - 7\right)$

$h(x) = \ln\left(2x - 12\right)$

Para calcular C^0, de h, igualamos a 0 :

$\ln\left(2x - 12\right) = 0$

aplicamos la inversa del ln , la exponencial $e^{(x)}$, en ambos miembros :

$e^{\ln(2x-12)} = e^0 \implies 2x - 12 = 1 \implies 2x = 1 + 12 \implies x = \dfrac{13}{2}$

Por lo tanto, el C^0 de $h(x) = \ln\left(2x - 12\right)$ es :

$C^0 = \left\{\dfrac{13}{2}\right\}$

Nota : $\dfrac{13}{2}$ en $2x - 12$ da 2. $\dfrac{13}{2} - 12 = 1$ para que el $\ln\left(1\right) = 0$