Capítulo 6

Números complejos y polinomios

6.1 Números complejos - Forma binómica

Los números complejos son un conjunto de números que extiende a los números reales. Se crearon para resolver problemas de diversas áreas de la física, la ingeniería y la matemática.

Forma binómica

Notamos con la letra $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos y usamos la letra z para referirnos a ellos:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}, \ i^2 = -1\}.$$

La expresión $a + bi$ es la *forma binómica* del número complejo $z = a + bi$.
A a lo llamamos *parte real* del número z y a b lo llamamos *parte imaginaria* del número z y escribimos $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$.

Por ejemplo:

- $z = 1 - 2i$ $\qquad Re(z) = 1, Im(z) = -2$
- $z = 3 + \frac{5}{4}i$ $\qquad Re(z) = 3, Im(z) = \frac{5}{4}$
- $z = -4i$ $\qquad Re(z) = 0, Im(z) = -4$
- $z = 1$ $\qquad Re(z) = 1, Im(z) = 0$
- $z = 0$ $\qquad Re(z) = 0, Im(z) = 0$

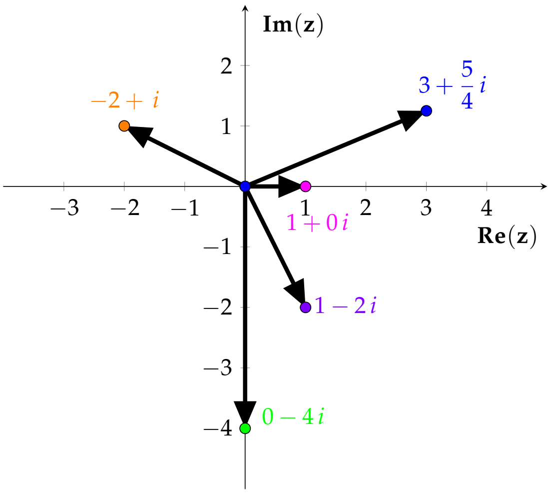
La parte imaginaria de un número complejo es un número real, no tiene la i.
$Im(1 - 2i) = -2$
$\cancel{Im(1 - 2i) = -2i}$

Observación.
Los números reales también son números complejos (son los que tienen parte imaginaria nula, o sea $a \in \mathbb{R}, b = 0$): $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Representación en el plano complejo

Podemos representar a los números complejos en el plano cartesiano ubicando la parte real del número en el eje x y la parte imaginaria en el eje y, lo que nos permitirá darle un sentido geométrico a las operaciones.

Identificamos a $z = a + b\,i$ con el punto $P = (a, b)$ de $\mathbb{R}^2$ o bien con el vector $\overrightarrow{OP}$.



Observar que los números reales se ubican sobre el eje x. Sobre el eje y se ubican los que tienen parte real nula, a los que llamamos *imaginarios puros.*

Asociamos por ejemplo:

- $z = 1 - 2\,i \ \sim \ (1, -2)$
- $z = 1 = 1 + 0\,i \ \sim \ (1, 0)$
- $z = 3 + \dfrac{5}{4}\,i \ \sim \ (3, \dfrac{5}{4})$
- $z = -2 + i \ \sim \ (-2, 1)$
- $z = -4\,i = 0 - 4\,i \ \sim \ (0, -4)$

Operaciones

1. **Suma**

   Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ son dos números complejos, la suma se define como:

   $$z + w = (a + c) + (b + d)\,i\,.$$

   Por ejemplo,

   $$(-2 + i) + (3 + 4\,i) = (-2 + 3) + (1 + 4)\,i = 1 + 5\,i.$$

   La suma se corresponde en el plano complejo con la suma de vectores.

2. **Producto por escalares**

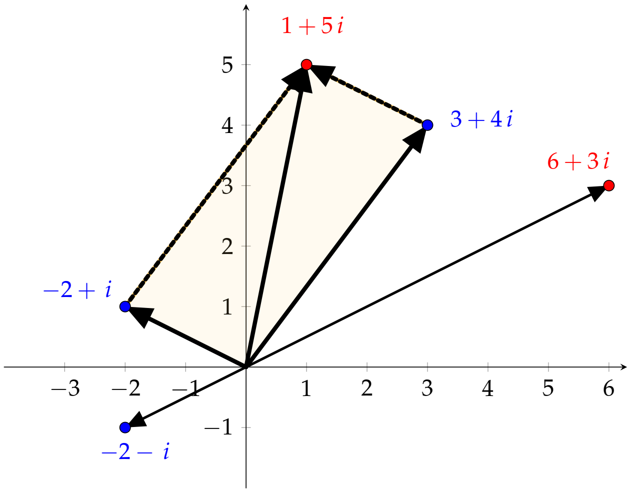
   Si $z = a + b\,i$ es un número complejo y $k \in \mathbb{R}$ es un escalar, el producto se define como:

   $$k.z = (k.a) + (k.b)\,i\,.$$

   Por ejemplo,

   $$-3.(-2 - i) = -3.(-2) + (-3).(-1)\,i = 6 + 3\,i.$$

   En el plano complejo, se corresponde con el producto de un vector por un escalar.



Observar que se verifica la *ley del paralelogramo* de la suma de vectores. También se observa el efecto de *dilatación* del producto por escalares.

3. **Producto de números complejos**

   Dados dos números complejos $z = a + b\,i$ y $w = c + d\,i$ se define el producto entre z y w como:

   $$z \cdot w = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)\, i\,.$$

   Parece una fórmula complicada, pero no hace falta memorizarla gracias a que este producto cumple la propiedad distributiva con la suma.
   Sabemos que $i^2 = -1$, que se corresponde con hacer $z \cdot z$ cuando $z = i$. Podemos, entonces, multiplicar dos números complejos de la siguiente forma:

   $$\begin{aligned}(a + b\,i) \cdot (c + d\,i) &= a \cdot c + a \cdot d\,i + b \cdot c\,i + b \cdot d\,i^2 = a \cdot c + (a \cdot d + b \cdot c)\,i + b \cdot d(-1) \\ &= a \cdot c - b \cdot d + (a \cdot d + b \cdot c)\,i\end{aligned}$$

   Por ejemplo:

   - $(3-2\,i) \cdot (4+\,i) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot\, i + (-2) \cdot 4\,i + (-2)\,i^2 = 12 + 3\,i - 8\,i - 2(-1)$
     $= 12 + 2 - 5\,i = 14 - 5\,i$
   - $(3+4\,i)^2 = (3+4\,i)(3+4\,i) = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4\,i + 4 \cdot 3\,i + 4 \cdot 4\,i^2$
     $= 9 - 16 + 24\,i = -7 + 24\,i$
   - $(3\,i)^3 = 3^3\,i^3 = 27\,(i^2)\,i = 27 \cdot (-1)\,i = -27\,i$

Observaciones.

1. Si $z = a + b\,i$, podemos generalizar

   $$z^2 = a^2 - b^2 + 2ab\,i$$

   Así también podríamos calcular cualquier potencia de z, pero un exponente alto involucra muchas cuentas. La forma binómica es cómoda para sumar y restar pero no lo es para hacer potencias grandes.

2. Algo curioso sucede con las potencias de i:

$$\begin{cases} i^1 = & & i \\ i^2 = & & -1 \\ i^3 = & (i^2)\cdot i = & -i \\ i^4 = & (i^2)^2 = & 1 \end{cases}$$

Luego, $i^5 = (i^4)\cdot i = i$, y comienzan a repetirse esos 4 resultados: $i,\ -1,\ -i$ y 1.
Por ejemplo $i^{18} = (i^4)^4 \cdot i^2 = 1^4(-1) = -1$.
Notamos entonces que el resultado depende del resto de dividir el exponente por 4, así sabiendo que $139 = 4\cdot 34 + 3$, calculamos:

$$i^{139} = (i^4)^{34}\cdot i^3 = i^3 = -i.$$

Módulo

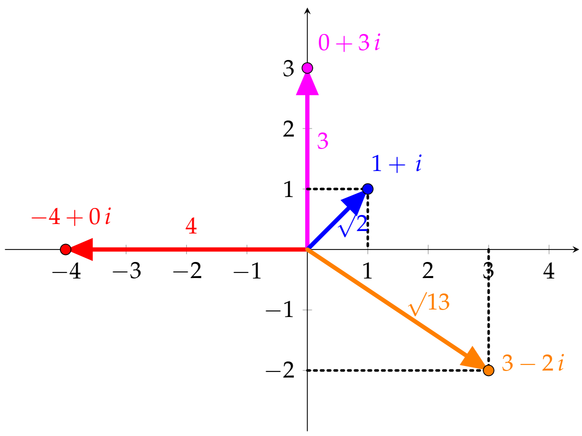
Dado $z = a + b\,i$, llamamos *módulo de z* al número real no negativo

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Si representamos a z en el plano complejo, el módulo coincide con la longitud del vector, o bien con la distancia de (a,b) al origen.

Por ejemplo:

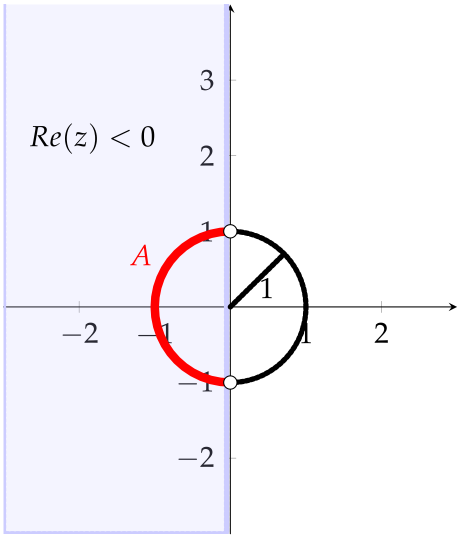
- $|3-2\,i| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$
- $|1+\,i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- $|3i| = \sqrt{0^2+3^2} = 3$
- $|-4| = \sqrt{(-4)^2+0^2} = 4$



Ejemplo 1. Representar el siguiente conjunto en el plano complejo:

$$A = \{z\in\mathbb{C}/\ |z| = 1 \text{ y } Re(z) < 0\}.$$

Solución.

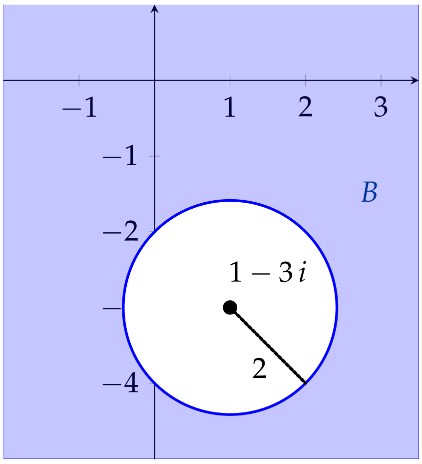


Si quisiéramos resolver la ecuación $|z| = 1$ deberíamos plantear $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Pero no se podría despejar de ahí ni a ni b.
Como se pide representar en el plano, resulta útil pensar a $|z|$ como la distancia de z al origen.
El conjunto A resulta ser entonces el conjunto de todos los puntos del plano complejo que distan 1 del origen y tienen parte real negativa.

Ejemplo 2. Representar en el plano complejo el conjunto:

$$B = \{z \in \mathbb{C} / \; |z - 1 + 3\,i| \geq 2\}$$

Solución.



Nuevamente interpretemos la inecuación pensando al módulo como una distancia. Acá es útil la siguiente observación, equivalente a la que vimos con vectores de $\mathbb{R}^2$:

$|z - w| =$ distancia entre z y w

Reescribimos entonces:

$$|z - 1 + 3\,i| = |z - (1 - 3\,i)|$$

para poder interpretar al conjunto B como el conjunto de todos los puntos del plano complejo que distan 2 o más de $1 - 3\,i$.

Vamos a introducir la noción de *conjugado* de un número complejo, que nos será de utilidad.

Conjugado

Dado $z = a + b\,i$, llamamos *conjugado de* z al número complejo:

$$\bar{z} = a - b\,i.$$

Por ejemplo:

- $\overline{4-5\,i} = 4+5\,i$
- $\overline{3\,i} = -3\,i$
- $\overline{-1+i} = -1-i$
- $\overline{5} = 5$

Geométricamente, conjugar es reflejar con respecto al eje x. Observar que los números reales son los únicos números complejos que quedan igual cuando los conjugamos, es decir

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}.$$

Propiedad.

Si $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$, entonces

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2.$$

Esta propiedad se comprueba haciendo el producto:

$$(a+b\,i)\cdot(a-b\,i) = a^2 + abi - ab\,i - b^2 i^2 = a^2 + b^2,$$

que es el módulo de z elevado al cuadrado.

Por ejemplo,

$$(3-2\,i)\cdot\overline{(3-2\,i)} = (3-2\,i)\cdot(3+2\,i) = 3^2 - 6\,i + 6\,i - 2^2 i^2 = 3^2 + 2^2 = 13.$$

Observar que lo importante es que obtuvimos un número real, “sin la i”.
Si $z \neq 0$, $|z|$ es un número real estrictamente positivo y podemos pasarlo dividiendo:

$$z\cdot\overline{z} = |z|^2 \iff \frac{z\cdot\overline{z}}{|z|^2} = 1 \iff z\cdot\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right) = 1.$$

Por lo tanto:

Inverso multiplicativo

Si $z \neq 0$, el inverso multiplicativo de z es

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Con esta observación podemos presentar la división de números complejos.

División

Si z y w son dos números complejos y $w \neq 0$, definimos el cociente de z por w como:

$$\frac{z}{w} = z\cdot w^{-1} = z\cdot\frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{z\cdot\overline{w}}{w\cdot\overline{w}}.$$

Por ejemplo,

$$\frac{3+5\,i}{2-\,i} = \left(\frac{3+5\,i}{2-\,i}\right)\cdot\left(\frac{2+\,i}{2+\,i}\right) = \frac{(3+5\,i)\cdot(2+\,i)}{(2-\,i)\cdot(2+\,i)} = \frac{6+3\,i+10\,i+5\,i^2}{2^2+1^2} = \frac{1}{5}+\frac{13}{5}\,i.$$

A continuación enunciamos algunas propiedades que verifican el conjugado y el módulo de números complejos:

Propiedades.

C1) $\overline{\overline{z}} = z$

C2) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$

C3) $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$

C4) Si $z \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$

M1) $z = 0 \iff |z| = 0$

M2) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

M3) $|\overline{z}| = |z|$

M4) Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

Ejemplo 3. Calcular el módulo de z, siendo

$$z = \frac{(3-\,i)^6\cdot(-i)^{15}\cdot\overline{(2+2\,i)}}{(1-\,i)^3}.$$

Solución. La idea es usar las propiedades de módulo para no calcular las potencias de los números complejos que en forma binómica son muy costosas.
Sabemos:

- $|z\cdot w| = |z|\,|w| \Longrightarrow |z^n| = \Big|\underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n \text{ veces}}\Big| = \underbrace{|z|\cdot|z|\cdots|z|}_{n \text{ veces}} = |z|^n.$
- Si $w \neq 0$, $\left|w^{-1}\right| = |w|^{-1}$; entonces, $\left|\frac{z}{w}\right| = \left|z\cdot w^{-1}\right| = |z|\cdot\left|w^{-1}\right| = |z|\cdot|w|^{-1} = \frac{|z|}{|w|}.$
- $|\overline{z}| = |z|.$

Luego,

$$|z| = \left|\frac{(3-\,i)^6(-i)^{15}\overline{(2+2\,i)}}{(1-\,i)^3}\right| = \frac{|3-\,i|^6\,|-i|^{15}\,|\overline{2+2\,i}|}{|1-\,i|^3} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3^2+(-1)^2}\right)^6\,1^{15}\,|2+2\,i|}{(\sqrt{1^2+1^2})^3} = \frac{(10^{\frac{1}{2}})^6\cdot 1\cdot\, 2\sqrt{1^2+1^2}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{10^3.\cancel{2\sqrt{2}}}{\cancel{2\sqrt{2}}} = 1000$$

$\boxed{\text{Respuesta: } |z| = 1000.}$

Ejemplo 4. Dar la forma binómica de $z = \dfrac{3+3i}{(1+i)^2}$.

Solución. Primero desarrollamos el cuadrado y luego multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$z = \frac{3+3i}{(1+i)^2} = \frac{3+3i}{1+2i-1} = \frac{3+3i}{2i} = \frac{(3+3i)\cdot(-2i)}{(2i)\cdot(-2i)} =$$
$$= \frac{(3+3i)\cdot(-2i)}{4} = \frac{-6i+6}{4} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

Respuesta: La forma binómica de z es $z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$.

Ejemplo 5. Dar la forma binómica de todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican la ecuación:

$$(1-i)z = \overline{3-2i} - 3z - \frac{1}{i}.$$

Solución. Realizamos el despeje de la ecuación igual que con los números reales. En los cocientes multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$$\begin{aligned}
(1-i)z &= \overline{3-2i} - 3z - \frac{1}{i} \iff \\
(1-i)z + 3z &= 3+2i - \frac{1}{i}\frac{(-i)}{(-i)} \iff \\
(1+3-i)z &= 3+2i - (\frac{-i}{1}) \iff \\
(4-i)z &= 3(1+i) \iff \\
z &= 3\cdot\frac{1+i}{4-i} = 3\cdot\frac{(1+i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = 3\cdot\frac{3+5i}{16+1} = \frac{9}{17} + \frac{15}{17}i
\end{aligned}$$

Respuesta: El único $z \in \mathbb{C}$ que es solución de la ecuación es $z = \frac{9}{17} + \frac{15}{17}i$.

Ejemplo 6. Dar la forma binómica de los $z \in \mathbb{C}$ que verifican la ecuación:

$$z\cdot(\overline{z}+1) = 10+2i.$$

Solución. Comenzamos planteando $z = a+bi$ y reescribiendo la ecuación que deben cumplir los $z \in \mathbb{C}$ que estamos buscando:

$$z\cdot(\overline{z}+1) = (a+bi)\cdot(a-bi+1) = 10+2i$$

Si desarrollamos el producto de la izquierda, tenemos

$$a\cdot(a+1) + b^2 + bi = a^2 + a + b^2 + bi = 10+2i.$$

Como dos números complejos son iguales si y sólo si lo son su parte real y su parte imaginaria, el problema consiste en encontrar a y $b \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{cases} a^2 + a + b^2 & = & 10 \\ b & = & 2 \end{cases}$$

Reemplacemos el valor de b en la primera ecuación:

$$a^2 + a + 4 = 10 \iff a^2 + a - 6 = 0 \iff a = -3 \text{ ó } a = 2.$$

Así obtenemos que $z = -3 + 2i$ ó $z = 2 + 2i$.

Respuesta: Todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación son $z = -3 + 2i$ y $z = 2 + 2i$.

Ecuaciones cuadráticas

Veamos ahora cómo, con los números complejos, podemos resolver ecuaciones de grado 2.

Ejemplo 7. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican:

a) $z^2 - 4 = 0$ b) $z^2 + 1 = 0$ c) $z^2 + 9 = 0$

Solución.

a) $z^2 - 4 = 0$.

Buscamos las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 4 = 0$. Que la "incógnita" se llame z sólo nos sugiere que las soluciones pueden ser complejas.

$$z^2 - 4 = 0 \iff z^2 = 4 \iff z = 2 \quad \text{ó} \quad z = -2$$

b) $z^2 + 1 = 0$.

$z^2 + 1 = 0 \iff z^2 = -1$, que no tiene solución para los números reales.

Pero en $\mathbb{C}$ tenemos dos soluciones:

$$z = i \quad \text{y} \quad z = -i$$

pues $i^2 = -1$ y $(-i)^2 = -1$.

c) $z^2 + 9 = 0$.

$$z^2 + 9 = 0 \iff z^2 = -9 \iff z = 3i \quad \text{ó} \quad z = -3i$$

pues $(3i)^2 = -9$ y $(-3i)^2 = -9$.

Observación.

Al incorporar el objeto i conseguimos dos soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ y ahora, en $\mathbb{C}$, todas las ecuaciones cuadráticas tendrán dos raíces (eventualmente repetidas).

Ejemplo 8. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican $z^2 - 3 + 4i = 0$.

Solución. El problema equivale a resolver $z^2 = 3 - 4\,i$, pero ahora la solución no es tan inmediata como en los ejemplos anteriores.
Buscamos a y $b \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(a + b\,i)^2 = 3 - 4\,i$$

Desarrollamos el cuadrado y llegamos a:

$$a^2 - b^2 + 2ab\,i = 3 - 4\,i.$$

Como dos números complejos son iguales si y sólo si lo son su parte real y su parte imaginaria, el problema consiste en encontrar a y $b \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = & 3 \\ \quad 2ab & = & -4 \end{cases}.$$

Para poder despejar a y b de este sistema de ecuaciones de manera más sencilla, agregamos una tercera ecuación que también verifican los números reales a y b que buscamos.
Como $z^2 = 3 - 4\,i$, tomando módulo a cada lado, tenemos:

$$|z|^2 = |3 - 4\,i| \Longrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$$

La agregamos a nuestro sistema:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = & 3 & (1) \\ \quad 2ab & = & -4 & (2) \\ a^2 + b^2 & = & 5 & (3) \end{cases}$$

Observar que estas ecuaciones tienen incógnitas reales, “¡no hay i!”, a y b son números reales.

Con (1) y (3) despejamos a^2 y b^2, por ejemplo sumando las ecuaciones:

$$2a^2 = 8 \Longleftrightarrow a^2 = 4 \Longleftrightarrow a = 2 \text{ ó } a = -2.$$

Volviendo a (3):

$$4 + b^2 = 5 \Longleftrightarrow b^2 = 1 \Longleftrightarrow b = 1 \text{ ó } b = -1.$$

Por último, con la ecuación (2) terminamos de determinar a y b usando la regla de los signos.
Como $2ab < 0$, a y b tienen distinto signo.
Luego, o bien $a = 2$ y $b = -1$ o bien $a = -2$ y $b = 1$.
Se tiene entonces que los $z \in \mathbb{C}$ que verifican $z^2 - 3 + 4i = 0$ son

$$z = 2 - i \quad \text{y} \quad z = -2 + i.$$

Respuesta: Todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^2 - 3 + 4\,i = 0$ son $z = 2 - i$ y $z = -2 + i$.

Ejemplo 9. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que: $z^2 - 2z + 3 = 0$

Solución. Vemos que a diferencia de los ejemplos anteriores tenemos tres términos y no podemos despejar directamente z de ahí. Completando cuadrados se puede reescribir la ecuación cuadrática en su *forma canónica*:

$$\begin{aligned} z^2 - 2z + 3 = 0 &\iff (z-1)^2 + 2 = 0 \\ (z-1)^2 = -2 &\iff z - 1 = \sqrt{2}\,i \quad \text{ó} \quad z - 1 = -\sqrt{2}\,i \\ &\iff z = 1 + \sqrt{2}\,i \quad \text{ó} \quad z = 1 - \sqrt{2}\,i \end{aligned}$$

Respuesta: Todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^2 - 2z + 3 = 0$ son $z = 1 + \sqrt{2}\,i$ y $z = 1 - \sqrt{2}\,i$.

Cualquier ecuación cuadrática se puede expresar en su *forma canónica*:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \underset{a \neq 0}{\iff} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

De esta expresión se deduce la fórmula resolvente para hallar las raíces de una ecuación cuadrática.

Fórmula resolvente

Versión compleja de la fórmula resolvente: las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$ son

$$z = \frac{-b + w}{2a},$$

donde w es un número complejo que cumple $w^2 = b^2 - 4ac$.

Apliquemos la fórmula resolvente a la ecuación de este ejercicio:

$$z^2 - 2z + 3 = 0$$

Tenemos que los coeficientes de la ecuación son $a = 1$, $b = -2$ y $c = 3$.
Como $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$ es un número real negativo,

$$z = \frac{-b + w}{2a} = \frac{-(-2) + w}{2.1} = \frac{2 + w}{2}$$

con $w \in \mathbb{C}$ que cumple:

$$w^2 = -8.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones:

$$w = \sqrt{8}\,i = 2\sqrt{2}\,i \quad \text{y} \quad w = -\sqrt{8}\,i = -2\sqrt{2}\,i.$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación dada son:

$$z = \frac{2 + 2\sqrt{2}\,i}{2} \quad \text{y} \quad z = \frac{2 - 2\sqrt{2}\,i}{2}$$

que, simplificando el 2, vemos que son las mismas que obtuvimos arriba.

Ejemplo 10. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^2 - z + 1 + i = 0$.

Solución. Tenemos una ecuación cuadrática con incógnita z con los tres términos. Para aplicar la fórmula resolvente, reconocemos los coeficientes:

$$a = 1, \ b = -1 \ \text{ y } \ c = 1 + i.$$

Calculamos $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 + i) = -3 - 4i$, que es un número no real.
Usamos entonces la versión compleja de la fórmula resolvente:

$$z = \frac{-b + w}{2a} = \frac{-(-1) + w}{2.1} = \frac{1 + w}{2},$$

donde $w \in \mathbb{C}$ cumple $w^2 = b^2 - 4ac = -3 - 4i$.
Ahora para hallar w usamos la técnica de las tres ecuaciones como en el Ejemplo 8.
Resolviendo las tres ecuaciones, se llega a:

$$w = -1 + 2i \quad \text{ó} \quad w = 1 - 2i.$$

Por lo tanto,

$$z = \frac{1 + (-1 + 2i)}{2} \quad \text{ó} \quad z = \frac{1 + (1 - 2i)}{2} \iff z = \frac{2i}{2} \quad \text{ó} \quad z = \frac{2 - 2i}{2}.$$

Luego, las soluciones de la ecuación son:

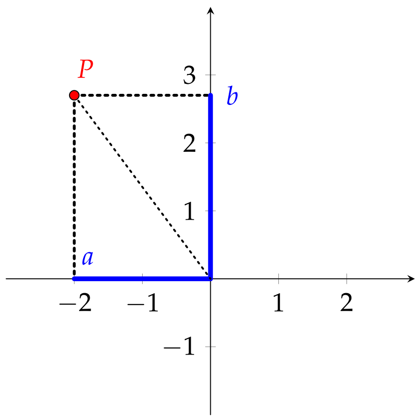
$$z = i \quad \text{y} \quad z = 1 - i.$$

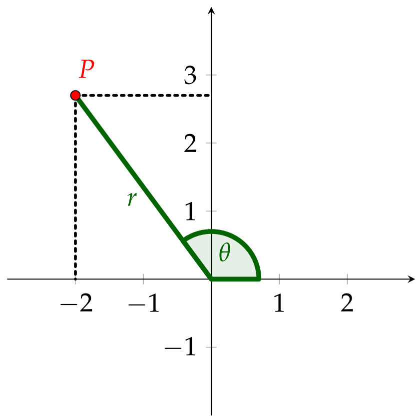
Respuesta: Todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^2 - z + 1 + i = 0$ son $z = i$ y $z = 1 - i$.

6.2 Números complejos - Forma trigonométrica

Usando la representación en el plano que vimos al estudiar números complejos en forma binómica, podemos introducir una manera alternativa de expresar a los números complejos: la *forma trigonométrica*.

Dado un punto $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ podemos identificarlo a través de sus coordenadas cartesianas o a través de sus *coordenadas polares*, que son la distancia r del punto al origen y el ángulo θ que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con el semieje positivo de las x.



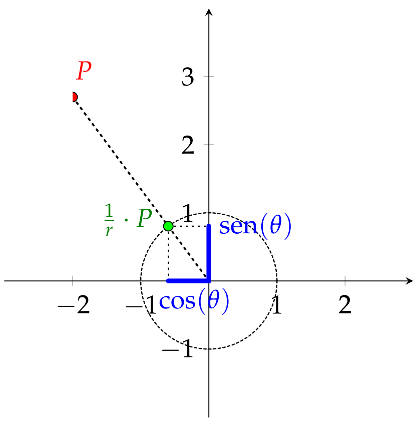


¿Cómo se relacionan a y b con r y θ?

Sabemos que r es la longitud del vector:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \|P\|.$$

Si multiplicamos a P por $\frac{1}{r}$ tenemos un vector de norma 1 y que forma el mismo ángulo con el semieje positivo de las x; por lo tanto $\frac{1}{r} \cdot P$ es un punto de la circunferencia de centro 0 y radio 1.



Como vimos en la sección **Ángulos, seno y coseno**, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\frac{1}{r} \cdot P = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)).$$

Multiplicando por r,

$$P = r \cdot (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)).$$

Entonces:

$$(a, b) = P = (r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta)).$$

Luego, podemos reescribir al número complejo $z = a + b\,i$ de la siguiente forma:

$$z = a + b\,i = r\cos(\theta) + r\operatorname{sen}(\theta)\,i$$

$$z = r(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))$$

donde $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ y θ es el ángulo que forma z con el semieje positivo de las x en su representación en el plano complejo.

Conseguimos así una nueva expresión que pone dos nuevos valores en juego. Como las funciones *seno* y *coseno* son periódicas, hay muchos valores de $\theta \in \mathbb{R}$ que dan el mismo resultado

z. Para tener unicidad en la escritura tomamos un representante $\theta \in [0, 2\pi)$ y lo llamamos el *argumento de* z. Escribimos $\theta = arg(z)$.

Forma trigonométrica

Dado $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, llamamos la *forma trigonométrica* de z a la expresión:

$$z = |z| \left(\cos(\theta) + i\ \text{sen}(\theta)\right), \qquad \text{con } \theta \in [0, 2\pi).$$

Ejemplo 1. Expresar en forma binómica, calculando la parte real y la parte imaginaria.

a) $z = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{4}))$.

b) $z = \frac{2}{3}(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\ \text{sen}(\frac{5}{3}\pi))$

c) $z = \cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi)$

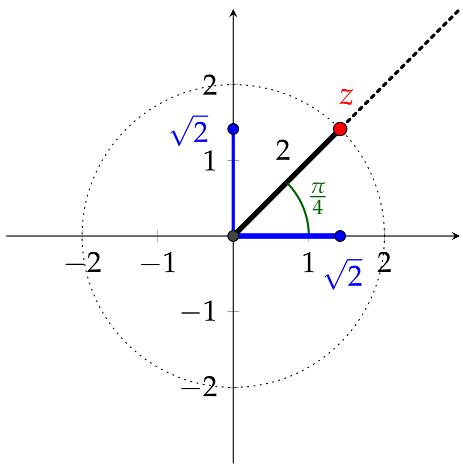
Solución.

a) $z = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{4}))$.

Es el número complejo que tiene módulo 2 y argumento $\frac{\pi}{4}$.
Si queremos conocer sus coordenadas cartesianas calculamos:

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ y } \ \text{sen}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} z &= 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{4})) \\ &= 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i \end{aligned}$$



Respuesta: $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

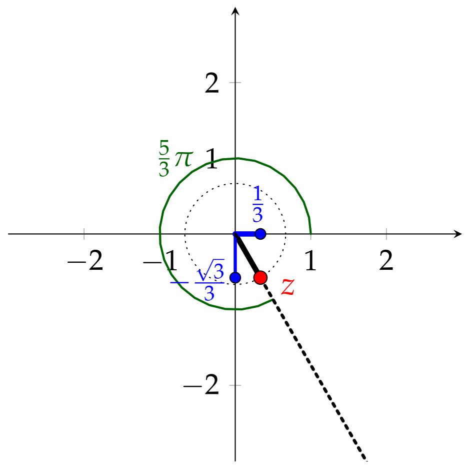
b) $z = \frac{2}{3}(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\ \text{sen}(\frac{5}{3}\pi))$

Es el número complejo que tiene módulo $\frac{2}{3}$ y argumento $\frac{5}{3}\pi$.

Podemos calcular:

$\cos(\frac{5}{3}\pi) = \frac{1}{2}$ y $\text{sen}(\frac{5}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} z &= \frac{2}{3}(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{5}{3}\pi)) \\ &= \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i. \end{aligned}$$

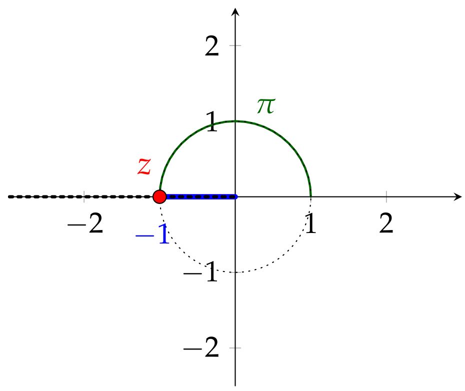


$\boxed{\text{Respuesta: } z = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i.}$

c) $z = \cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi)$

En este caso, z tiene módulo 1 y argumento π.

Podemos calcular *coseno* y *seno* o bien ubicarlo en el plano y ver sus coordenadas cartesianas.



$z = -1$.

$\boxed{\text{Respuesta: } z = -1.}$

Si z está expresado en su *forma binómica* y queremos escribirlo en su *forma trigonométrica* tenemos que tener presente la relación de $a = Re(z)$ y $b = Im(z)$ con $r = |z|$ y $\theta = arg(z)$ que se obtiene a partir de la igualdad

$$z = a + b\,i = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)) = |z|\cos(\theta) + i\,|z|\,\text{sen}(\theta),$$

$$\begin{cases} a = |z|\cos(\theta) \\ b = |z|\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

En esta sección será útil la siguiente tabla de valores de *seno* y *coseno*:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

y recordar los signos de *seno* y *coseno* de acuerdo al cuadrante donde se ubica el punto.

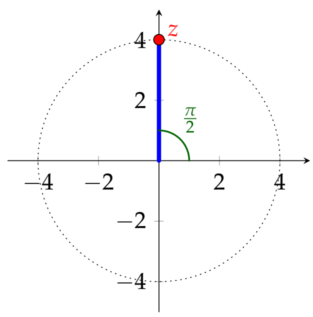
Ejemplo 2. Expresar en forma trigonométrica, calculando el módulo y el argumento.

a) $z = 4i$ b) $z = -3$ c) $z = 1 - i$

Solución.

a) $z = 4i$

Podemos ubicar el número z en el plano y observar que su distancia al origen es 4 (y por lo tanto su módulo es 4) y que su argumento es $\frac{\pi}{2}$ porque z se ubica en el semieje positivo de las y.



O bien podemos calcular $|z|$ y θ. En este caso $a = 0$ y $b = 4$.
Calculamos $|z| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$, y luego buscamos el argumento θ:

$$\begin{cases} a = |z|\cos(\theta) \\ b = |z|\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 4\cos(\theta) \\ 4 = 4\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{0}{4} = 0 \\ \text{sen}(\theta) = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

El único $\theta \in [0, 2\pi)$ que cumple las ecuaciones es $\theta = \frac{\pi}{2}$.

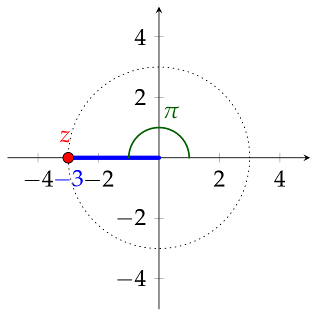
$\boxed{\text{Respuesta: } z = 4(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{2})).}$

b) $z = -3$

Nuevamente es sencillo observar la representación de z en el plano.

Su distancia al origen es 3 y, como z se encuentra en el semieje negativo de las x, su argumento es π.

$$-3 = 3(\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi))$$



$\boxed{\text{Respuesta: } z = 3(\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi)).}$

c) $z = 1 - i$

En este caso $a = 1$ y $b = -1$.

El módulo de z no es evidente, lo calculamos:

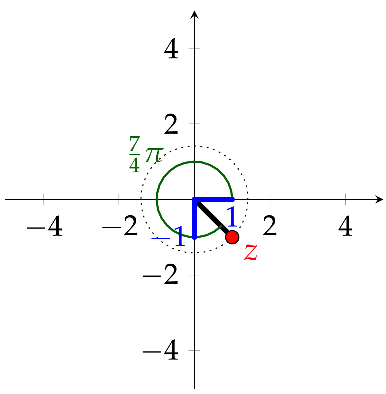
$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Para hallar el argumento tenemos dos opciones. Una opción es observar que el valor absoluto de la parte real y de la parte imaginaria coinciden y, por lo tanto, el complejo se ubica en la mitad del cuarto cuadrante y su argumento es $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4}$. La otra opción es usar las ecuaciones:

$$\begin{cases} a = |z|\cos(\theta) \\ b = |z|\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 & = & \sqrt{2}\cos(\theta) \\ -1 & = & \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) & = & \frac{1}{\sqrt{2}} & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \mathrm{sen}(\theta) & = & \frac{-1}{\sqrt{2}} & = & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Observamos que los valores de *seno* y *coseno* están en la tabla (son los correspondientes a $\frac{\pi}{4}$) pero con distinto signo, debido a que el número z se encuentra en el cuarto cuadrante y no en el primero. Buscamos el ángulo del cuarto cuadrante para el cual nos dan esos resultados.

$$\cos(\frac{7}{4}\pi) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\mathrm{sen}(\frac{7}{4}\pi) = -\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Por lo tanto, $\theta = \frac{7}{4}\pi$. Recordando que el módulo de z es $\sqrt{2}$, concluimos:

Respuesta: $z = \sqrt{2}(\cos(\frac{7}{4}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{7}{4}\pi))$.

La forma binómica y la forma trigonométrica son dos formas de expresar el mismo número complejo. La forma trigonométrica pone de manifiesto otras características, que son su módulo y su argumento. Esta representación nos va a ser útil para calcular productos, potencias y raíces de números complejos.

Ejemplo 3. Escribir a $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ en forma trigonométrica.

Solución. Sabemos que $a = -1$ y $b = \sqrt{3}$, entonces z está en el segundo cuadrante. Calculamos:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\begin{cases} a = |z|\cos(\theta) \\ b = |z|\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} -1 = 2\cos(\theta) \\ \sqrt{3} = 2\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{-1}{2} \\ \text{sen}(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Si miramos los valores de $\cos(\theta)$ y $\text{sen}(\theta)$ sin signo, en la tabla se corresponden con la columna de $\frac{\pi}{3}$. Ahora buscamos el ángulo θ en el segundo cuadrante. Tenemos:

$$\cos(\frac{2}{3}\pi) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \text{sen}(\frac{2}{3}\pi) = \text{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, $|z| = 2$ y $\theta = \frac{2}{3}\pi$.

Respuesta: La forma trigonométrica de z es $z = 2(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{2}{3}\pi))$.

Ejemplo 4. Escribir a $z = 5\,i(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}))$ en forma trigonométrica.

Solución. Parece ya estar resuelto, pero... Recordemos que en la forma trigonométrica aparece como factor el módulo de z que es un número **real positivo** ($5i$ no puede ser el módulo). Luego, ésta no es la forma trigonométrica de z. Para poder determinarla, buscamos los valores de la parte real a y de la parte imaginaria b. Aplicando la propiedad distributiva y calculando los valores de *seno* y *coseno*, resulta:

$$z = 5i(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3})) = 5i(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 5\,\frac{1}{2}\,i + 5i^2\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

Tenemos entonces que la parte real y la parte imaginaria de z son: $a = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ y $b = \dfrac{5}{2}$, y, por lo tanto, z se encuentra en el segundo cuadrante.

Ahora sí calculamos el módulo (sacando $\dfrac{5}{2}$ de factor común) y el argumento de z:

$$|z| = \left|\frac{5}{2}(-\sqrt{3}+i)\right| = \frac{5}{2}\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = \frac{5}{2}\cdot 2 = 5.$$

$$\begin{cases} a = |z|\cos(\theta) \\ b = |z|\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{5\sqrt{3}}{2} & = & 5\cos(\theta) \\ \dfrac{5}{2} & = & 5\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta) & = & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}(\theta) & = & \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Los valores de *seno* y *coseno*, sin considerar el signo, se encuentran en la tabla en la columna de $\dfrac{\pi}{6}$. En el segundo cuadrante, los valores corresponden a $\theta = \dfrac{5}{6}\pi$.

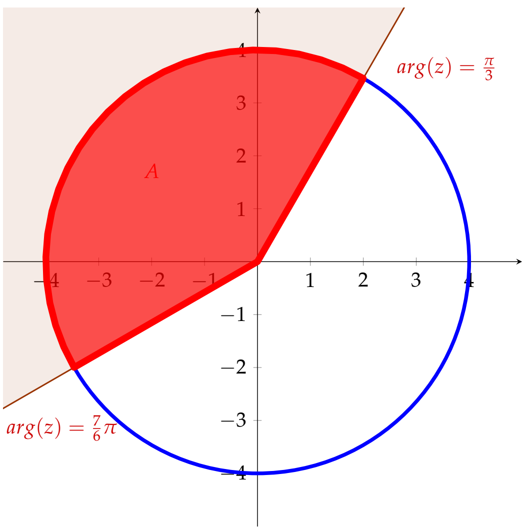
Respuesta: La forma trigonométrica de z es $z = 5(\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\,\text{sen}(\frac{5}{6}\pi))$.

Ejemplo 5. Representar en el plano el conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| \leq 4 \ \text{y} \ \frac{\pi}{3} \leq arg(z) \leq \frac{7}{6}\pi\}.$$

Solución. La condición para el módulo ya la analizamos en los primeros ejercicios y vimos que convenía pensar en $|z|$ como la *distancia de z al origen*. Por lo tanto los números complejos que cumplen $|z| \leq 4$ son aquellos que se ubican dentro de la circunferencia de centro el origen y radio 4.

Por otro lado, hay una restricción para el argumento, que, recordemos, es el ángulo que forma con el semieje positivo de las x. Ubicamos como siempre primero "los iguales": $arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$ y $arg(z) = \dfrac{7}{6}\pi$, que son semirrectas que comienzan en el origen ("rayos"). Y luego, pintamos la región que encierran esos "rayos".



Operaciones en forma trigonométrica

A un número complejo $z \neq 0$ podemos representarlo con su módulo y su argumento, que es un valor entre 0 y 2π. Pero sabemos que *coseno* y *seno* son funciones periódicas con período 2π. Por ejemplo, $\cos(\pi) = \cos(3\pi) = \cos(21\pi) = \cos(-5\pi)$.

A la hora de operar es más cómodo permitirnos variar el valor de θ y, de ser necesario, al final de las operaciones tomar un representante en $[0, 2\pi)$ para dar el argumento.
Sobre todo cuando resolvemos ecuaciones, es necesario poder determinar cuándo dos expresiones con *seno* y *coseno* son iguales.

Igualdad

Si $z = r(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))$ y $w = t(cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$, con $r, t > 0$, y $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$z = w \Longleftrightarrow \begin{cases} r &= t \\ \theta &= \alpha + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$3(\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi)) = 3(\cos(21\pi) + i\operatorname{sen}(21\pi)) \quad (\text{con } k = 10),$
$3(\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi)) = 3(\cos(-\pi) + i\operatorname{sen}(-\pi)) \quad (\text{con } k = -1),$

y, expresado en forma binómica, es el número -3.

Para calcular el producto de dos números complejos no nulos usaremos el siguiente teorema que se deduce de las fórmulas para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos:

Teorema de De Moivre

Sean z y w dos números complejos no nulos,

$$z = |z|\,(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha)) \text{ y } \quad w = |w|\,(\cos(\beta) + i\operatorname{sen}(\beta)), \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Entonces:

$$z \cdot w = |z|\,|w|\,(\cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)).$$

Observamos que, en este enunciado, α y β no son necesariamente los argumentos de z y w (es decir, pueden no estar en el intervalo $[0, 2\pi)$).

A partir del Teorema de De Moivre se deducen fórmulas para las potencias, el conjugado y el inverso multiplicativo de un número complejo no nulo:

Si $z = |z|\,(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))$, entonces

- $z^n = |z|^n\,(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta))$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- $\overline{z} = |z|\,(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta))$
- $z^{-1} = |z|^{-1}\,(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta))$

Por lo tanto, se deduce también una fórmula para el cociente de dos números complejos no nulos:

Si $z = |z|\,(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$ y $w = |w|\,(\cos(\beta) + i\operatorname{sen}(\beta))$, entonces

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha - \beta) + i\operatorname{sen}(\alpha - \beta)).$$

Ejemplo 6. Si $z = \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}))$ y $w = 3(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{5}{3}\pi))$, escribir en forma trigonométrica

$$z \cdot w, \quad z^{-1} \quad \text{y} \quad w^4.$$

Solución.

- $z \cdot w$

  Usando el teorema de De Moivre:

  $$z \cdot w = \frac{1}{2} \cdot 3(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}\pi)) = \frac{3}{2}(\cos(\frac{13}{6}\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{13}{6}\pi)).$$

  Observar que $\frac{13}{6}\pi > 2\pi$, por lo que para dar el argumento restamos 2π: $\frac{13}{6}\pi - 2\pi = \frac{\pi}{6}$.

  $$z \cdot w = \frac{3}{2}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})).$$

- z^{-1}

  $$z^{-1} = (\frac{1}{2})^{-1}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2})) = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2})).$$

  Ahora, como $-\frac{\pi}{2} < 0$, sumamos 2π para poder dar el argumento: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3}{2}\pi$.

  $$z^{-1} = 2(\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{3}{2}\pi)).$$

- w^4

  Usamos la fórmula para las potencias que se deduce del Teorema de De Moivre:

  $$w^4 = 3^4(\cos(4 \cdot \frac{5}{3}\pi) + i\operatorname{sen}(4 \cdot \frac{5}{3}\pi)) = 81(\cos(\frac{20}{3}\pi) + i\operatorname{sen}(\frac{20}{3}\pi)).$$

  Ahora, el ángulo $\frac{20}{3}\pi$ es bastante mayor que 2π, ya que $\frac{20}{3} \approx 6{,}7$. ¿Cuánto hay que restarle para obtener el argumento de w^4? Recordemos que $\cos(\frac{20}{3}\pi) = \cos(\frac{20}{3}\pi + 2k\pi)$

para cualquier valor entero de k, y lo mismo ocurre para *seno*. Es decir, se suman o restan múltiplos de 2π.

En este caso, con $k = -3$ queda $\frac{20}{3}\pi + 2(-3)\pi = \frac{2}{3}\pi$, con lo cual

$$w^4 = 81(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2}{3}\pi)).$$

Respuesta: $z \cdot w = \frac{3}{2}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6}))$, $z^{-1} = 2(\cos(\frac{3}{2}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3}{2}\pi))$ y $w^4 = 81(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2}{3}\pi))$.

Observación. El cálculo de potencias se facilita considerablemente al usar la forma trigonométrica (imaginemos calcular w^4 usando la forma binómica...) Pero no tenemos una fórmula para la suma ni para la resta de números complejos expresados en esta forma.
Por ejemplo, $z + w$ queda:

$$z + w = \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})) + 3(\cos(\frac{5}{3}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5}{3}\pi))$$

Para sumarlos, nos conviene expresarlos en forma binómica. Dependiendo de la operación que queramos realizar usaremos la forma binómica o la forma trigonométrica.
En este caso, $z = \frac{1}{2}(0 + i\,1) = \frac{1}{2}i$ y $w = 3(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ y, entonces,

$$z + w = \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i = \frac{3}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2})i.$$

Ejemplo 7. Calcular la parte real y la parte imaginaria de $z = \dfrac{(1+i)^8}{(\sqrt{3}+i)^3}$.

Solución. Para calcular potencias de números complejos es conveniente expresarlos en forma trigonométrica.
Trabajemos con $1 + i$:

$$|1 + i| = \sqrt{2}$$

y, ubicando al punto en el plano, notamos que está en la mitad del primer cuadrante. Por lo tanto el argumento es $\frac{\pi}{4}$. Entonces,

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4})).$$

Aplicando el teorema de De Moivre,

$$(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8(\cos(8.\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(8.\frac{\pi}{4})) = 2^4(\cos(2\pi) + i\,\mathrm{sen}(2\pi)).$$

Ahora trabajamos con $\sqrt{3}+i$:

$$\left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{3+1} = 2.$$

Para determinar su argumento, buscamos θ que cumpla las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\cos(\theta) &= \sqrt{3} \\ 2\,\mathrm{sen}(\theta) &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta) &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \mathrm{sen}(\theta) &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Estos resultados se hallan en la tabla en la columna de $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Entonces,

$$\sqrt{3}+i = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6})).$$

Aplicando el teorema de De Moivre,

$$(\sqrt{3}+i)^3 = 2^3(\cos(3\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(3\frac{\pi}{6})) = 2^3(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})).$$

Por último usamos la fórmula que dedujimos del teorema de De Moivre para calcular el cociente:

$$\begin{aligned} z = \frac{(1+i)^8}{(\sqrt{3}+i)^3} &= \frac{2^4(\cos(2\pi) + i\,\mathrm{sen}(2\pi))}{2^3(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}))} = \frac{2^4}{2^3}(\cos(2\pi - \frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(2\pi - \frac{\pi}{2})) \\ &= 2(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{2})) = 2(0 + i(-1)) = -2i \end{aligned}$$

Nos dio como resultado un número imaginario puro; por lo tanto:

Respuesta: La parte real de z es 0 y la parte imaginaria de z es -2.

Observación. Ahora que vimos la forma trigonométrica, podemos apreciar el efecto geométrico del producto entre números complejos. Sabemos que sumar y restar produce *traslaciones* y que multiplicar por un escalar produce *dilataciones*.
Cuando multiplicamos dos números complejos los módulos se multiplican y los argumentos se suman. De este modo:

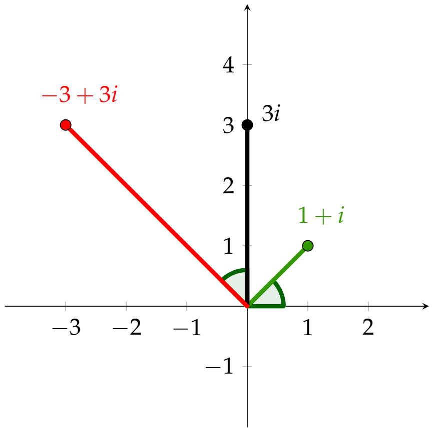
> La multiplicación por un número complejo no nulo $z = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ produce una dilatación por un factor $|z|$ y una *rotación* de ángulo θ.

Por ejemplo, observemos la multiplicación de $3i$ por $1+i$. En forma binómica,

$$3i(1+i) = 3i + 3i^2 = -3 + 3i.$$

Si los escribimos en forma trigonométrica, tenemos:

$$3i = 3(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})) \quad \text{y} \quad 1+i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}))$$



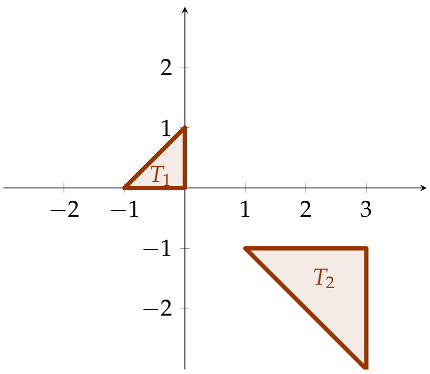
Entonces,

$$3i(1+i) = 3\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})).$$

Vemos que $3i$ se "estiró" por un factor $\sqrt{2} \approx 1,4$ y rotó en un ángulo de $\frac{\pi}{4}$.

Ejemplo 8. Dado el triángulo T_1 de vértices -1, 0 e i, determinar qué operaciones se deben realizar para transformarlo en el triángulo T_2 de vértices $1-i$, $3-i$ y $3-3i$.

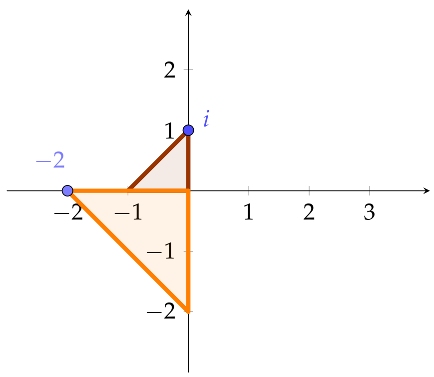
Solución.



Al dibujarlo observamos que el triángulo está rotado, "estirado" y trasladado.
La rotación y la dilatación las podemos conseguir multiplicando por un número complejo. ¿Cuál?

Vemos que el triángulo está rotado en 90° ó $\frac{\pi}{2}$ y que los lados iguales inicialmente medían 1 y finalmente miden 2.
Debemos entonces multiplicar por un número de módulo 2 para duplicar su longitud y de argumento $\frac{\pi}{2}$ para rotarlo.
Por lo tanto, multiplicamos primero todos los puntos del triángulo por el número:

$$z = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})) = 2i.$$



Por ejemplo, el vértice i en forma trigonométrica es:

$$i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}).$$

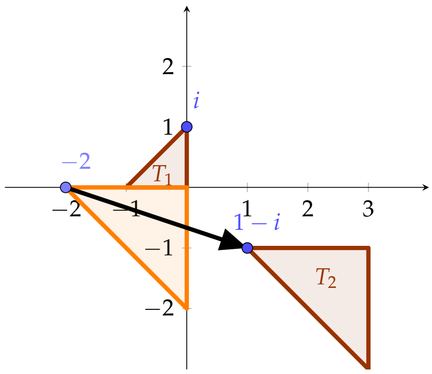
Al multiplicarlo por z queda:

$$i.z = 2(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})) = 2(\cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi)) = -2.$$

Ahora sólo nos falta trasladarlo rígidamente 3 unidades a la derecha y una unidad hacia abajo. Por lo que debemos sumar a todos los puntos del triángulo el número $w = 3 - i$.
Por ejemplo, al sumarle w al vértice -2 queda:

$$-2 + w = -2 + 3 - i = 1 - i.$$

Por lo tanto, las dos operaciones son multiplicar primero por $z = 2i$ y luego sumar $w = 3 - i$. (Observar que el orden es importante).



Concluimos que si x pertenece al triángulo T_1, entonces $x.z + w$ pertenece al triángulo T_2.

Respuesta: Para transformar T_1 en T_2 hay que multiplicar por $z = 2i$ y luego sumar $w = 3 - i$.

6.3 Raíces y ecuaciones con números complejos

Con la forma binómica de números complejos llegamos a resolver ecuaciones cuadráticas. Ahora con la forma trigonométrica podremos resolver algunas ecuaciones de mayor grado.
Por ejemplo, la ecuación $x^3 - 8 = 0$, que es equivalente a $x^3 = 8$, tiene una sola solución en el conjunto de los números reales, que es $x = \sqrt[3]{8} = 2$.
En el conjunto de los números complejos tendremos dos soluciones más y por eso diremos que hay *tres raíces cúbicas* del número 8. El símbolo $\sqrt{\ }$ resulta insuficiente y no lo usaremos.

Ejemplo 1. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^3 = 8$.

Solución. Ponemos nuestra incógnita en forma trigonométrica:

$$z = |z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)).$$

Expresamos también al 8 en forma trigonométrica:

$$8 = 8(\cos(0) + i \operatorname{sen}(0))$$

Tenemos entonces una igualdad en forma trigonométrica:

$$z^3 = 8 \iff (|z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)))^3 = 8(\cos(0) + i \operatorname{sen}(0)).$$

Aplicamos el teorema de De Moivre del lado izquierdo de la igualdad, y el problema se traduce en encontrar $|z|$ y θ tales que:

$$|z|^3 (\cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta)) = 8(\cos(0) + i \operatorname{sen}(0)).$$

Finalmente planteamos la igualdad de los números en términos de sus módulos y ángulos:

$$z^3 = 8 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |z|^3 & = & 8 \\ 3\theta & = & 0 + 2k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Resolvemos primero la ecuación para el módulo:

$$|z|^3 = 8 \Longleftrightarrow |z| = \sqrt[3]{8} = 2$$

El módulo de z es un número **real**, acá tiene sentido el símbolo $\sqrt{\ }$.

Sabemos entonces que $|z| = 2$.
Despejamos θ de la igualdad para los ángulos. Queda:

$$\theta = \frac{0 + 2k\pi}{3} = \frac{2k\pi}{3}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Para cada valor de $k \in \mathbb{Z}$, tenemos un valor de θ diferente. Sin embargo, veremos que hay sólo tres valores que dan lugar a números complejos distintos (es decir, hay sólo tres posibles argumentos distintos para z). Si le damos valores enteros a k, tenemos:

- Si $k = 0$, entonces $\theta = \frac{2.0.\pi}{3} = 0$. Con $|z| = 2$, formamos el complejo

$$z_0 = 2(\cos(0) + i \operatorname{sen}(0)) \Longrightarrow z_0 = 2(1 + 0i) = 2$$

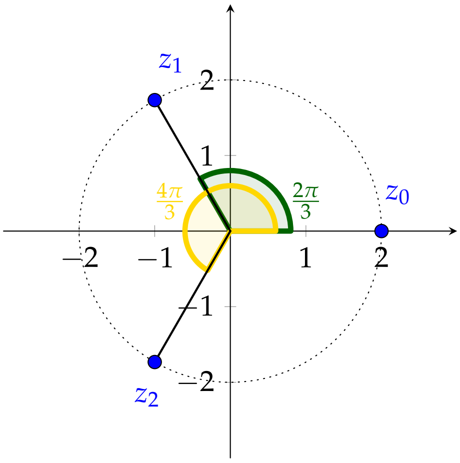
- Si $k = 1$, entonces $\theta = \frac{2.1.\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Con $|z| = 2$, formamos el complejo

$$z_1 = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3})) \Longrightarrow z_1 = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + \sqrt{3}i$$

- Si $k = 2$, entonces $\theta = \frac{2.2.\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. Con $|z| = 2$, formamos el complejo

$$z_2 = 2(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{4\pi}{3})) \Longrightarrow z_2 = 2(-\frac{1}{2} + i(-\frac{\sqrt{3}}{2})) = -1 - \sqrt{3}i$$

Observación. Cualquier otro valor de $k \in \mathbb{Z}$ dará un resultado diferente de θ pero un valor repetido de z.
Por ejemplo, con $k = 3$, $\theta = \frac{2.3.\pi}{3} = 2\pi$ y el número z queda $z = 2(\cos(2\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi)) = 2$, que es el mismo resultado que con $k = 0$.
Si tomamos $k = 4$ obtenemos z_1. Los resultados comienzan a repetirse.
Similarmente, para $k < 0$ podemos ver que se repiten los mismos resultados.



Obtuvimos tres soluciones de la ecuación

$$z^3 = 8$$

Por lo tanto hay tres números complejos que elevados al cubo dan como resultado 8.
Uno es $z = 2$ (la raíz cúbica *real*) y obtuvimos, además, dos raíces cúbicas no reales, que son $z = -1 + \sqrt{3}i$ y $z = -1 - \sqrt{3}i$.
Podemos corroborar:
$2^3 = 8$
$(-1 + \sqrt{3}i)^3 = 8$
$(-1 - \sqrt{3}i)^3 = 8.$

Respuesta: Todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^3 = 8$ son $z = 2$, $z = -1 + \sqrt{3}i$ y $z = -1 - \sqrt{3}i$.

Ejemplo 2. Hallar las raíces sextas de -1.

Solución. Las raíces sextas del número -1 son todos los números complejos que elevados a la sexta dan como resultado -1, es decir, todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican la ecuación:

$$z^6 = -1.$$

En este caso no hay soluciones reales, ya que ningún número real elevado a la sexta da un resultado negativo. De haber soluciones, serán todas complejas. Las buscamos trabajando en forma trigonométrica.

$$z = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)) \Longrightarrow z^6 = |z|^6\,(\cos(6\theta) + i\,\text{sen}(6\theta))$$

$$-1 = \cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi).$$

Luego,

$$z^6 = -1 \Longleftrightarrow |z|^6\,(\cos(6\theta) + i\,\text{sen}(6\theta)) = (\cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi))$$

Buscamos los valores de $|z|$ y de θ tales que:

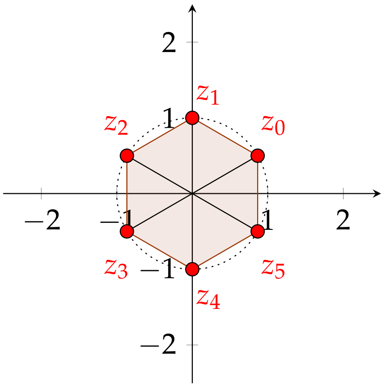
$$|z|^6\,(\cos(6\theta) + i\,\text{sen}(6\theta)) = (\cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi)) \Longleftrightarrow \begin{cases} |z|^6 &= 1, \\ 6\theta &= \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} |z| &= \sqrt[6]{1} = 1, \\ \theta &= \dfrac{\pi + 2k\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Todas las soluciones tienen módulo 1 y, por lo tanto, están sobre la circunferencia de radio 1. Si vamos tomando valores enteros consecutivos de k, vemos que los resultados se ditribuyen regularmente en la circunferencia. De un ángulo al siguiente se avanza en $\frac{2}{6}\pi$.

- Si $k = 0$, entonces $\theta = \dfrac{\pi + 0}{6} = \dfrac{\pi}{6}$. Teniendo en cuenta que $|z| = 1$, se obtiene el complejo: $z_0 = 1.(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{6})) = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{6})$.

- Si $k = 1$, entonces $\theta = \dfrac{\pi + 2\pi}{6} = \dfrac{3\pi}{6}$ y resulta $z_1 = \cos(\frac{3\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3\pi}{6})$
- Si $k = 2$, entonces $\theta = \dfrac{\pi + 4\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$ y resulta $z_2 = \cos(\frac{5\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{6})$
- Si $k = 3$, entonces $\theta = \dfrac{\pi + 6\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$ y resulta $z_3 = \cos(\frac{7\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{7\pi}{6})$
- Si $k = 4$, entonces $\theta = \dfrac{\pi + 8\pi}{6} = \dfrac{9\pi}{6}$ y resulta $z_4 = \cos(\frac{9\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{9\pi}{6})$
- Si $k = 5$, entonces $\theta = \dfrac{\pi + 10\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$ y resulta $z_5 = \cos(\frac{11\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{11\pi}{6})$



Obtuvimos 6 raíces sextas del número -1, que son las 6 raíces de la ecuación:

$$z^6 + 1 = 0$$

Todas las soluciones están inscriptas en la circunferencia de radio 1 y se distribuyen regularmente. Podemos pensarlas como los vértices de un polígono regular de 6 lados (hexágono).

Raíces n-ésimas

Podemos generalizar el procedimiento realizado en los ejemplos anteriores. Dado un número complejo w no nulo, buscamos todos los $z \in \mathbb{C}$ que cumplen:

$$z^n = w$$

A las soluciones de esta ecuación las llamamos las *raíces n-ésimas de w*.

Planteamos la igualdad en forma trigonométrica como en los ejemplos anteriores:

$$z = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) \Longrightarrow z^n = |z|^n\,(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta))$$

$$w = |w|\,(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$$

$$z^n = w \Longleftrightarrow |z|^n\,(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)) = |w|\,(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} |z|^n & = & |w|\,, \\ n\theta & = & \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Pidiendo que $0 \le \theta < 2\pi$ (ésta es la condición para que θ sea un *argumento*), obtenemos n soluciones diferentes, que son:

$$z_k = |w|^{1/n}\,(\cos(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\alpha + 2k\pi}{n})), \quad 0 \le k \le n-1.$$

En el plano complejo, las n soluciones están inscriptas en la circunferencia de centro en el origen y radio $|w|^{1/n}$ y se distribuyen regularmente. Podemos pensarlas como los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen.

Más ecuaciones con números complejos

Ejemplo 3. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^3 + 2\bar{z}^2 = 0$.

Solución. Tenemos que resolver una ecuación que involucra potencias, por lo que conviene expresar a z en forma trigonométrica. Sin embargo, la forma trigonométrica no es la más conveniente para trabajar con sumas. En este caso lo podemos evitar pasando un término del otro lado de la ecuación:

$$z^3 + 2\bar{z}^2 = 0 \iff z^3 = -2\bar{z}^2.$$

En primer lugar, observemos que $z = 0$ es una solución de la ecuación. Buscamos ahora las soluciones $z \neq 0$ trabajando en forma trigonométrica.
Usamos el Teorema de De Moivre:

$$z = |z|\,(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)) \implies z^3 = |z|^3\,(\cos(3\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta)),$$

$$\bar{z} = |z|\,(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)) \implies \bar{z}^2 = |z|^2\,(\cos(-2\theta) + i\operatorname{sen}(-2\theta)),$$

$$-2 = 2(\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi)) \implies -2\bar{z}^2 = 2\,|z|^2\,(\cos(-2\theta+\pi) + i\operatorname{sen}(-2\theta+\pi)).$$

Es fundamental escribir a -2 en forma trigonométrica. Recordar que los números reales positivos tienen argumento 0 y los números reales negativos tienen argumento π.

$$z^3 = -2\bar{z}^2 \iff |z|^3\,(\cos(3\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta)) = 2\,|z|^2\,(\cos(-2\theta+\pi) + i\operatorname{sen}(-2\theta+\pi))$$

Buscamos $|z|$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tales que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} |z|^3 & = & 2\,|z|^2, \\ 3\theta & = & -2\theta + \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} |z|^3 - 2\,|z|^2 & = & 0, \\ 3\theta + 2\theta & = & \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} |z|^2\,(|z| - 2) & = & 0, \\ 5\theta & = & \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Trabajamos primero con la ecuación para el módulo.
Para que el producto sea 0 o bien $|z|^2 = 0$ o bien $|z| - 2 = 0$. Por lo tanto,

$$|z| = 0 \quad \text{ó} \quad |z| = 2$$

Como $|z| = 0 \iff z = 0$, volvemos a obtener $z = 0$ (ya habíamos deducido a simple vista que es una solución de la ecuación).
Para los z de módulo 2 bucamos el argumento con la ecuación para θ. Despejando:

$$\theta = \frac{\pi + 2k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Si $k = 0$, $\theta = \frac{\pi}{5} \implies z_0 = 2(\cos(\frac{\pi}{5}) + i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{5}))$
- Si $k = 1$, $\theta = \frac{3\pi}{5} \implies z_1 = 2(\cos(\frac{3\pi}{5}) + i\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{5}))$
- Si $k = 2$, $\theta = \frac{5\pi}{5} = \pi \implies z_2 = 2(\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi)) = -2$

- Si $k = 3$, $\theta = \frac{7\pi}{5} \Longrightarrow z_3 = 2(\cos(\frac{7\pi}{5}) + i\,\text{sen}(\frac{7\pi}{5}))$
- Si $k = 4$, $\theta = \frac{9\pi}{5} \Longrightarrow z_4 = 2(\cos(\frac{9\pi}{5}) + i\,\text{sen}(\frac{9\pi}{5}))$

Observar que si $k = 5$, entonces $\theta = \frac{11\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + 2\pi$; por lo tanto $z_5 = z_0$ y comienzan a repetirse las soluciones.

Una forma sistemática de hallar todos los valores de k para los cuales se obtienen las distintas soluciones es determinar todos los $k \in \mathbb{Z}$ para los cuales $\theta = \frac{\pi + 2k\pi}{5}$ es el argumento de un número complejo, es decir, verifica $\theta \in [0, 2\pi)$. Planteamos:

$$0 \leq \frac{\pi + 2k\pi}{5} < 2\pi$$

Para despejar k, en primer lugar, multiplicamos cada miembro de la desigualdad por 5 (que como es positivo no modifica las desigualdades)

$$0 \leq \pi + 2k\pi < 10\pi$$

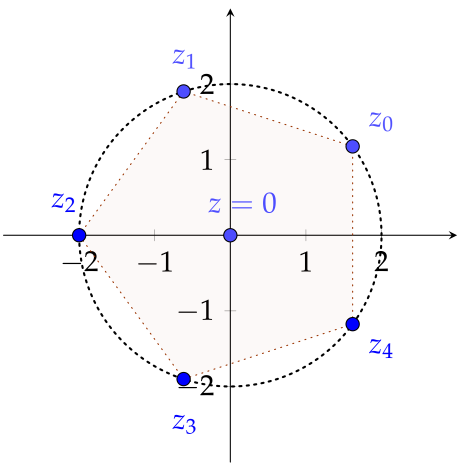
Observamos que $\pi + 2k\pi = (1 + 2k)\pi$. Entonces, dividimos cada miembro por π (y como $\pi > 0$ no se modifican los signos de las desigualdades):

$$0 \leq 1 + 2k < 10$$

Finalmente, restamos 1 y dividimos por 2 en cada miembro:

$$-\frac{1}{2} \leq k < \frac{9}{2}$$

De este modo, concluimos que los valores de k que nos dan los argumentos de las soluciones $z \neq 0$ de la ecuación son todos los números **enteros** que están en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, es decir, $k = 0, 1, \ldots, 4$.



La ecuación $z^3 + 2\bar{z}^2 = 0$ tiene 6 soluciones. Una es $z = 0$ y las otras 5 están inscriptas en la circunferencia de radio 2. Se distribuyen regularmente cada $\frac{2\pi}{5} = 72°$. Para graficarlas dividimos π en quintos y ubicamos la primera solución que encontramos que es z_0, que tiene argumento $\frac{\pi}{5}$. Luego avanzamos de a $\frac{2}{5}\pi$. Observar que obtuvimos dos soluciones reales que son 0 y -2 y las otras cuatro son complejas no reales.

Respuesta: Las soluciones de la ecuación $z^3 + 2\bar{z}^2 = 0$ son $z = 0$ y los números complejos $z_k = 2(\cos(\frac{\pi + 2k\pi}{5}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi + 2k\pi}{5}))$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Ejemplo 4. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que:

$$z^4 = 9i\,|z|^2 \quad \text{y} \quad Re(z) < 0.$$

Solución. Trabajamos primero con la ecuación que, como tiene exponentes altos, la escribimos en forma trigonométrica. Observemos que, si bien $z = 0$ es solución de la ecuación, no satisface la condición $Re(z) < 0$. Buscamos entonces $z \neq 0$, $z = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$. Entonces,

$$z^4 = |z|^4\,(\cos(4\theta) + i\,\mathrm{sen}(4\theta)).$$

Como $|z|^2$ es un número real positivo, $9i\,|z|^2$ es imaginario puro.Tiene entonces módulo $9\,|z|^2$ y argumento $\frac{\pi}{2}$:

$$9i\,|z|^2 = 9\,|z|^2\,(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})).$$

Buscamos entonces $|z|$ y θ tales que:

$$|z|^4\,(\cos(4\theta) + i\,\mathrm{sen}(4\theta)) = 9\,|z|^2\,(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})).$$

Esto equivale a que:

$$\begin{cases} |z|^4 &= 9\,|z|^2, \\ 4\theta &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |z|^4 - 9\,|z|^2 = 0, \\ \theta = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Para el módulo tenemos:

$$|z|^4 - 9\,|z|^2 = 0 \iff |z|^2\,(|z|^2 - 9) = 0 \iff |z| = 0 \quad \text{ó} \quad |z|^2 = 9$$

Descartamos $|z| = 0$ porque estamos buscando $z \neq 0$. Tenemos entonces que $|z|^2 = 9$ y, por lo tanto, $|z| = 3$.

Trabajamos ahora con el argumento:

$$\theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4} = \frac{\pi + 4k\pi}{8}.$$

Para que z cumpla la condición $Re(z) < 0$ debe estar en el segundo o en el tercer cuadrante. Busquemos los valores de $k \in \mathbb{Z}$ para que se verifique:

$$Re(z) < 0 \iff \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \iff \frac{\pi}{2} < \frac{\pi + 4k\pi}{8} < \frac{3\pi}{2}$$

Despejamos las dos inecuaciones en simultáneo, pasamos el 8 multiplicando (que como es positivo no modifica las inecuaciones) y luego pasamos π restando en ambas inecuaciones:

$$8 \cdot \frac{\pi}{2} < \pi + 4k\pi < 8 \cdot \frac{3\pi}{2} \iff 4\pi < \pi + 4k\pi < 12\pi \iff 4\pi - \pi < 4k\pi < 12\pi - \pi$$

$$\iff 3\pi < 4k\pi < 11\pi \underset{4\pi>0}{\iff} \frac{3\pi}{4\pi} < k < \frac{11\pi}{4\pi} \iff \frac{3}{4} < k < \frac{11}{4}.$$

Los valores enteros de k que se encuentran entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{11}{4}$ son $k = 1$ y $k = 2$, por lo tanto:

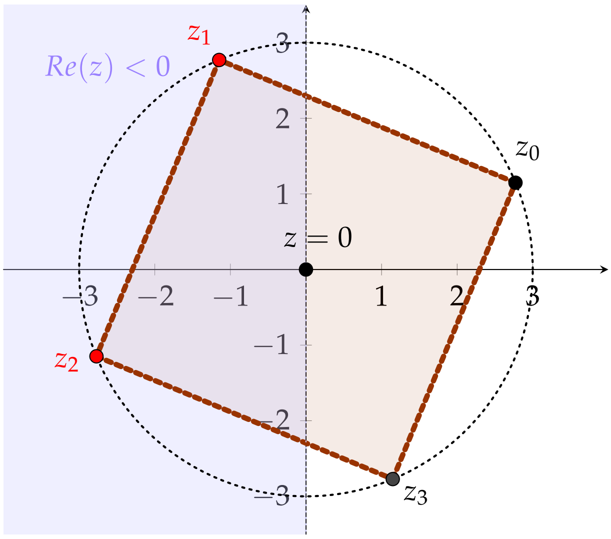
- Con $k = 1$, $\theta = \frac{5\pi}{8} \Longrightarrow z_1 = 3(\cos(\frac{5\pi}{8}) + i\,\text{sen}(\frac{5\pi}{8}))$.
- Con $k = 2$, $\theta = \frac{9\pi}{8} \Longrightarrow z_2 = 3(\cos(\frac{9\pi}{8}) + i\,\text{sen}(\frac{9\pi}{8}))$.

Respuesta: Las soluciones son $z_1 = 3(\cos(\frac{5\pi}{8}) + i\,\text{sen}(\frac{5\pi}{8}))$ y $z_2 = 3(\cos(\frac{9\pi}{8}) + i\,\text{sen}(\frac{9\pi}{8}))$.

Observación.

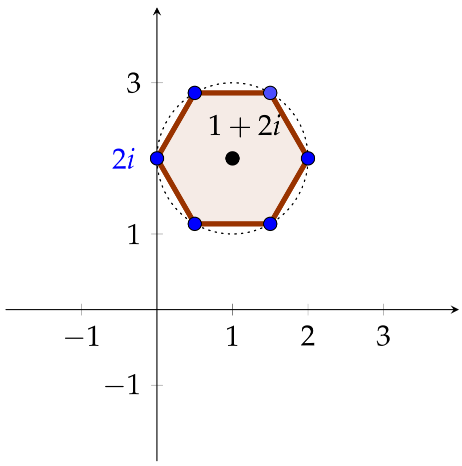
Se puede verificar calculando
$Re(z_1) = 3\cos(\frac{5\pi}{8}) \approx -1{,}1 < 0$ y
$Re(z_2) = 3\cos(\frac{9\pi}{8}) \approx -2{,}7 < 0$.

Otra opción es calcular las cuatro soluciones no nulas de la ecuación y representarlas en un gráfico para observar cuáles "caen" en el segundo o tercer cuadrante. En ese caso, z_0 y z_3 se descartan por estar en el primer y cuarto cuadrante respectivamente y tener parte real positiva.



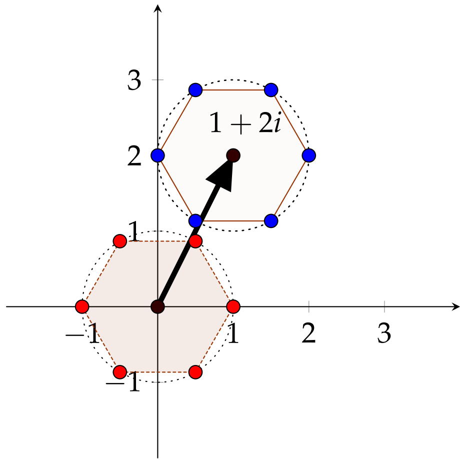
Ejemplo 5. Hallar los vértices de un hexágono regular de centro $1 + 2i$, inscripto en una circunferencia de radio 1 y tal que uno de sus vértices es $2i$.

Solución. Hagamos un gráfico para comprender mejor lo que buscamos.



Uno de los 6 vértices ya lo tenemos, es $2i$.
Con el gráfico tal vez podemos ver el vértice opuesto, que es el $2 + 2i$, pero no es sencillo identificar los otros cuatro vértices.
Sabemos que las raíces sextas de un número complejo se distribuyen como vértices de un hexágono, pero centrado en el origen.
Busquemos primero los vértices del hexágono centrado en el origen y luego traslademos rígidamente sumando $1 + 2i$ a todos los vértices.

¿Los vértices rojos son las raíces sextas de qué número?
Pensemos que son las soluciones de $z^6 = w$.
Tomamos entonces uno de los vértices, por ejemplo $z = 1$, y lo reemplazamos en la ecuación: $1^6 = 1$. Por lo tanto, son las 6 raíces sextas del número 1 (también decimos raíces sextas de *la unidad*). Observar que -1 es una de las raíces sextas de 1.



Buscamos primero los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^6 = 1$.
Observamos que $z = 0$ no es solución. Resolvemos en forma trigonométrica, buscando $|z|$ y θ:

$$z = |z|\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right) \quad \text{y} \quad 1 = 1(\cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0))$$

Entonces:

$$z^6 = 1 \iff |z|^6\left(\cos(6\theta) + i\,\mathrm{sen}(6\theta)\right) = \cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0).$$

$$\iff \begin{cases} |z|^6 &= 1, \\ 6\theta &= 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \iff \begin{cases} |z| &= 1, \\ \theta &= \dfrac{2k\pi}{6}, \quad 0 \le k \le 6-1. \end{cases}$$

Así, las soluciones de la ecuación son:

$$z_k = \cos(\frac{2k\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2k\pi}{6}), \quad 0 \le k \le 5.$$

Para conseguir los vértices azules debemos sumarles $1 + 2i$. Expresamos entonces los 6 vértices z_k en forma binómica y luego les sumamos $1 + 2i$ para trasladarlos.

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1 \Longrightarrow w_0 = 1 + 1 + 2i = 2 + 2i. \\
z_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Longrightarrow w_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 + 2i = \frac{3}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2} + 2)i. \\
z_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Longrightarrow w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 + 2i = \frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2} + 2)i. \\
z_3 &= -1 \Longrightarrow w_3 = -1 + 1 + 2i = 2i. \\
z_4 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Longrightarrow w_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 + 2i = \frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2)i. \\
z_5 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Longrightarrow w_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 + 2i = \frac{3}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2)i.
\end{aligned}$$

Respuesta: Los vértices del hexágono son $\{w_0, \quad w_1, \quad w_2, \quad w_3, \quad w_4, \quad w_5\}$.

6.4 Polinomios: definiciones básicas

La resolución de ecuaciones es uno de los problemas con más historia dentro de la matemática. El interés por resolver estos problemas dio origen al estudio de los polinomios. En esta sección estudiaremos propiedades que nos permitirán, entre otras cosas, encontrar soluciones de ecuaciones polinomiales.

Una expresión que está formada por una combinación de sumas, productos y restas entre una *indeterminada* x y diferentes números se llama un **polinomio**. En general:

Polinomios

Un *polinomio* con coeficientes en $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $a_j \in \mathbb{K}$. Los a_j son los *coeficientes* de P.

Notamos $\mathbb{K}[x] = \{P \ / \ P$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}\}$.
Es decir, $\mathbb{K}[x]$ es el conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Por ejemplo, las siguientes expresiones son polinomios:

- $P(x) = 2x - 1$, $P \in \mathbb{Q}[x]$
- $Q(x) = 2x^3 + (2+i)x^2 + 1$, $Q \in \mathbb{C}[x]$
- $R(x) = x^2 + \sqrt{2}x - 1$, $R \in \mathbb{R}[x]$

Operaciones en $\mathbb{K}[x]$

Ejemplo 1. Sean $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = x^5 - 1$ y $R(x) = -x^3 + 2x - 5$. Calcular:

a) $P.Q$ b) $P + R$ c) $P^2 - xQ$

Solución. Para hacer estos cálculos vamos a utilizar las propiedades de las operaciones que conocemos (distributiva, conmutativa y asociativa). También vamos a agrupar los términos con el mismo exponente. Es decir, vamos a trabajar con la indeterminada x como si fuera un número.

a)

$$\begin{aligned}(P.Q)(x) &= (2x^2 - 3x + 1).(x^5 - 1) = 2x^2x^5 - 3xx^5 + x^5 - 2x^2 + 3x - 1\\ &= 2x^7 - 3x^6 + x^5 - 2x^2 + 3x - 1\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } (P.Q)(x) = 2x^7 - 3x^6 + x^5 - 2x^2 + 3x - 1}$

b)

$$\begin{aligned}(P+R)(x) &= (2x^2-3x+1)+(-x^3+2x-5) = -x^3+2x^2+(-3+2)x+(1-5)\\ &= -x^3+2x^2-x-4\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } (P+R)(x) = -x^3+2x^2-x-4}$

c) En este caso, calculemos primero P^2:

$$P^2(x) = (2x^2-3x+1)^2 = (2x^2-3x+1).(2x^2-3x+1) = 4x^4-12x^3+13x^2-6x+1$$

Calculemos ahora xQ:

$$(xQ)(x) = x(x^5-1) = x^6-x$$

Por lo tanto,

$$(P^2-xQ)(x) = 4x^4-12x^3+13x^2-6x+1-(x^6-x) = -x^6+4x^4-12x^3+13x^2-5x+1$$

$\boxed{\text{Respuesta: } (P^2-xQ)(x) = -x^6+4x^4-12x^3+13x^2-5x+1}$

Como vimos, las operaciones entre polinomios se realizan utilizando las propiedades y reglas que conocemos de las operaciones entre números.
En cuanto a la igualdad de polinomios, tenemos la siguiente definición:

Igualdad de polinomios

Dos polinomios $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ y $Q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ en $\mathbb{K}[x]$ son iguales si y sólo si

$$a_j = b_j \ \ \forall 0 \le j \le n.$$

Ejemplo 2. Sean $P(x) = a^2x^2-(3-a)x-1$ y $Q(x) = (3x-1)(3x+1)$. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que $P = Q$.

Solución. Observemos primero que el polinomio Q se puede escribir como $Q(x) = 9x^2-1$ (es decir, como una diferencia de cuadrados). Esto se puede comprobar desarrollando el producto $(3x-1)(3x+1)$. Luego, para que $P = Q$, todos los coeficientes tiene que ser iguales, es decir:

- $-1 = -1$
- $3-a = 0$
- $a^2 = 9$

La primera condición se verifica para todo $a \in \mathbb{R}$; la segunda, únicamente para $a = 3$, y la tercera, para $a = 3$ o $a = -3$. Por lo tanto, el único valor de a para el cual los polinomios son iguales es $a = 3$.

$\boxed{\text{Respuesta: } a = 3}$

Grado y coeficiente principal

Si $P \in \mathbb{K}[x]$ no es el polinomio nulo, es decir si $P \neq 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que el polinomio se puede escribir de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \quad \text{con} \quad a_n \neq 0.$$

En ese caso, n es el *grado de* P y se nota $\operatorname{gr}(P) = n$. Además, a_n se llama el *coeficiente principal* de P. Por definición, el polinomio nulo no tiene grado.
Cuando el coeficiente principal es igual a 1, se dice que el polinomio es *mónico*.

Ejemplo 3. Sean $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = x^5 - 1$ y $R(x) = -2x^2 + x$. Determinar los grados de los polinomios P, Q, $P+Q$, $P+R$ y $P.Q$.

Solución.

- $\operatorname{gr}(P) = 2$
- $\operatorname{gr}(Q) = 5$
- $\operatorname{gr}(P+Q) = \operatorname{gr}(x^5 + 2x^2 - 3x) = 5$
- $\operatorname{gr}(P+R) = \operatorname{gr}(-2x+1) = 1$
- $\operatorname{gr}(P.Q) = \operatorname{gr}(2x^7 - 3x^6 + x^5 - 2x^2 + 3x - 1) = 7$

Observemos que si $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ son polinomios no nulos, entonces

- si $P + Q \neq 0$, entonces $\operatorname{gr}(P+Q) \leq \text{máx}\,\{\operatorname{gr}(P), \operatorname{gr}(Q)\}$.
  Más aún, si $\operatorname{gr}(P) \neq \operatorname{gr}(Q)$, entonces $\operatorname{gr}(P+Q) = \text{máx}\,\{\operatorname{gr}(P), \operatorname{gr}(Q)\}$.
- $\operatorname{gr}(P.Q) = \operatorname{gr}(P) + \operatorname{gr}(Q)$.

Ejemplo 4. Sea Q un polinomio de grado 4. Sabiendo que el polinomio $(x^5Q + 1)x^2P$ tiene grado 12, determinar el grado del polinomio P.

Solución. Observemos primero que

$$\operatorname{gr}(x^5Q + 1) = 9$$

En efecto,

$$\operatorname{gr}(x^5Q) = \operatorname{gr}(x^5) + \operatorname{gr}(Q) = 5 + 4 = 9$$

y

$$\mathrm{gr}(x^5Q+1) = \text{máx}\left\{\mathrm{gr}(x^5Q), \mathrm{gr}(1)\right\} = \text{máx}\{9,0\} = 9.$$

Por otra parte, tenemos que

$$\mathrm{gr}(x^2P) = \mathrm{gr}(x^2) + \mathrm{gr}(P) = 2 + \mathrm{gr}(P)$$

de lo que se deduce que

$$12 = \mathrm{gr}((x^5Q+1)x^2P) = \mathrm{gr}(x^5Q+1) + \mathrm{gr}(x^2P) = 9 + 2 + \mathrm{gr}(P).$$

Por lo tanto, despejando, $\mathrm{gr}(P) = 1$.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathrm{gr}(P) = 1}$

Especialización y raíces

Dado un polinomio podemos reemplazar la indeterminada x por un número y efectuar las operaciones. Este procedimiento se llama *especializar* el polinomio.

Especialización de un polinomio

Sean $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$. Llamamos especialización de P en z al número

$$P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n \in \mathbb{K}.$$

Ejemplo 5. Sean $P(x) = 2x+1$, $Q(x) = 2x^3 + (2+i)x^2 + 1$, $R(x) = 1$ y $S(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Calcular $P(1)$, $Q(i)$, $R(-1)$ y $S(0)$.

Solución.

- $P(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
- $Q(i) = 2i^3 + (2+i)i^2 + 1 = -2i - (2+i) + 1 = -1 - 3i$
- $R(-1) = 1$
- $S(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + 2 = 2$

Raíces de un polinomio

Dado un polinomio $P \in \mathbb{K}[x]$ y un número $z \in \mathbb{K}$, decimos que z es una *raíz de P* si $P(z) = 0$.

Ejemplo 6. Hallar las raíces de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 4x - 8$

b) $Q(x) = 2ix - 8$

c) $R(x) = x^2 - 2x + 1$

d) $S(x) = 2x^2 + (-1 + i)x + i$

e) $T(x) = x^5 - 1$

Solución. Calcular las raíces de un polinomio P es resolver la ecuación $P(x) = 0$. Es decir, encontrar todos los números z tales que, al especializar P en z, el resultado da 0. ¿A qué conjunto de números tiene que pertenecer z? Cuando no se indique lo contrario, vamos a buscar las raíces en $\mathbb{C}$. Es decir, cuando el problema pida encontrar las raíces de un polinomio P, vamos a buscar todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifican $P(z) = 0$.

a) Para encontrar las raíces de P, despejamos: $4x - 8 = 0 \iff 4x = 8 \iff x = 2$.

$\boxed{\text{Respuesta: La única raíz de } P \text{ es } z = 2.}$

b) Para encontrar las raíces de Q, también despejamos:

$2ix - 8 = 0 \iff 2ix = 8 \iff ix = 4 \iff i^2x = 4i \iff -x = 4i \iff x = -4i.$

$\boxed{\text{Respuesta: La única raíz de } Q \text{ es } z = -4i.}$

c) Tenemos que resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 1 = 0$. Para eso, utilizamos la *fórmula resolvente* o podemos ver que $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, que se anula si y sólo si $x = 1$.

$\boxed{\text{Respuesta: La única raíz de } R \text{ es } z = 1.}$

d) Para hallar las raíces de S, también tenemos que resolver una ecuación cuadrática, pero a diferencia de la anterior, el polinomio S tiene coeficientes complejos. Aplicamos la *fórmula resolvente* (versión compleja):

$$az^2 + bz + c = 0 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{C} \iff z = \frac{-b + w}{2a}$$

donde w es un número complejo tal que $w^2 = b^2 - 4ac$.

En este caso, $a = 2$, $b = -1 + i$ y $c = i$. Al aplicar la fórmula obtenemos:

$$z = \frac{1 - i + w}{4}$$

donde w es un número complejo tal que $w^2 = (-1 + i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot i = -10i$.

Si $w = a + bi$, la igualdad de las partes reales y de las partes imaginarias da lugar al sistema:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 0 \\ 2ab &= -10 \end{cases}$$

(A este sistema podríamos agregarle, como ya vimos, la ecuación $a^2 + b^2 = 10$ que resulta de imponer la condición $|w|^2 = |-10i|$.) De la segunda ecuación, deducimos que a y b

tienen signos opuestos. Como $b = 0$ no es solución de la segunda ecuación, podemos despejar de esa ecuación $a = -\frac{5}{b}$ y, sustituyendo en la primera,

$$\frac{25}{b^2} - b^2 = 0 \Longleftrightarrow 25 - b^4 = 0 \Longleftrightarrow b = \pm\sqrt{5}$$

Reemplazando en la expresión de a:

$$a = \mp\sqrt{5}.$$

Entonces, los dos números complejos w tales que $w^2 = -10i$ son $w_1 = \sqrt{5} - \sqrt{5}i$ y $w_2 = -\sqrt{5} + \sqrt{5}i$. Por lo tanto, $z_1 = \frac{1 - i + \sqrt{5} - \sqrt{5}i}{4}$ y $z_2 = \frac{1 - i - \sqrt{5} + \sqrt{5}i}{4}$.

Respuesta: Las raíces de S son $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{4}i$ y $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{1-\sqrt{5}}{4}i$.

e) Ahora tenemos que resolver la ecuación $x^5 - 1 = 0$. Es decir, tenemos que encontrar los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^5 = 1$. Por lo tanto, las raíces de T son las raíces quintas de la unidad. Recordemos que una forma de resolver este problema es escribir a z en forma trigonométrica $z = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$, con $\theta = arg(z)$, y utilizar el teorema de De Moivre. Entonces, buscamos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$|z|^5\,(\cos(5\theta) + i\,\mathrm{sen}(5\theta)) = 1$$

Es decir:

$$\begin{cases} |z|^5 &= 1 \\ 5\theta &= 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z| &= 1 \\ \theta &= \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Como buscamos que $0 \leq \theta < 2\pi$, obtenemos $k = 0, 1, 2, 3, 4$ y, con estos valores, las cinco raíces de T: $z_k = \cos(\frac{2k\pi}{5}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2k\pi}{5})$.

Respuesta:
Las raíces de T son $z_0 = 1$, $z_1 = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{5})$, $z_2 = \cos(\frac{4\pi}{5}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{4\pi}{5})$, $z_3 = \cos(\frac{6\pi}{5}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{6\pi}{5})$ y $z_4 = \cos(\frac{8\pi}{5}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{8\pi}{5})$.

6.5 Cálculo de raíces de polinomios

En lo que sigue, vamos a ver algunas herramientas que nos servirán para hallar raíces de polinomios.
Un resultado útil en el caso de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ es el siguiente:

Propiedad

Si $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de P, entonces $\bar{z}$ es raíz de P.

Esto se da porque si

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

entonces

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = 0.$$

Usando que, para w_1 y w_2 en $\mathbb{C}$, vale que $\overline{w_1 w_2} = \overline{w_1} \cdot \overline{w_2}$ y $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$, resulta que

$$a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0.$$

Observemos que la última igualdad es válida porque los coeficientes del polinomio son números reales, es decir, $\overline{a_i} = a_i$ para $i = 0, \ldots, n$. Este razonamiento no se hubiera podido aplicar si $P \notin \mathbb{R}[x]$.

Algoritmo de división

Al igual que definimos la suma y el producto entre polinomios inspirados en la aritmética, vamos a extender la noción de divisibilidad de números a la divisibilidad de polinomios.
Sabemos, por ejemplo, que el polinomio $P(x) = x^2 - 9$ se puede escribir como producto de dos polinomios: $P(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Esto da lugar a decir que el polinomio P es divisible por $x - 3$ y por $x + 3$.
Se puede probar que si P y Q son dos polinomios en $\mathbb{K}[x]$, $Q \neq 0$, existen únicos polinomios $C, R \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$$

con $R = 0$ o $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(Q)$. En este caso, C y R se llaman, respectivamente, el *cociente* y el *resto* de la división de P por Q.

Divisibilidad

Si P y Q son polinomios en $\mathbb{K}[x]$, $Q \neq 0$, se dice que Q *divide a* P (o que P *es divisible por* Q) si el resto de la división de P por Q es el polinomio nulo. En este caso notamos $Q \mid P$.

Ejemplo 1. Sean $P(x) = x^2 - 2x + 1$, $Q(x) = x - 1$ y $S(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $Q \mid P$

b) $Q \mid S$

c) $P \mid S$

Solución. Calculemos los cocientes y los restos en cada caso. En esta ocasión, utilizaremos un algoritmo similar al que se puede utilizar en la división de números enteros.

a)
$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -2x & +1 & x-1 \\ \cline{4-4}
-x^2 & +x & & x-1 \\ \cline{1-2}
 & -x & +1 & \\
 & x & -1 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Entonces, $C(x) = x - 1$ y $R(x) = 0$.

$\boxed{\text{Respuesta: La afirmación es verdadera.}}$

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -x^3 & +2x^2 & +x & +1 & x-1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & & & & x^3+2x+3 \\ \cline{1-2}
 & & 2x^2 & +x & & \\
 & & -2x^2 & +2x & & \\ \cline{3-4}
 & & & 3x & +1 & \\
 & & & -3x & +3 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 4 &
\end{array}$$

Entonces, $C(x) = x^3 + 2x + 3$ y $R(x) = 4$.

$\boxed{\text{Respuesta: La afirmación es falsa.}}$

c)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -x^3 & +2x^2 & +x & +1 & x^2-2x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +2x^3 & -x^2 & & & x^2+x+3 \\ \cline{1-3}
 & x^3 & +x^2 & +x & & \\
 & -x^3 & +2x^2 & -x & & \\ \cline{2-4}
 & & 3x^2 & & +1 & \\
 & & -3x^2 & +6x & -3 & \\ \cline{3-5}
 & & & 6x & -2 &
\end{array}$$

Entonces, $C(x) = x^2 + x + 3$ y $R(x) = 6x - 2$.

$\boxed{\text{Respuesta: La afirmación es falsa.}}$

Una consecuencia importante del algoritmo de división es la siguiente: si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$, entonces
$$P(x) = (x - z)C(x) + R$$
donde $R = 0$ ó $\mathrm{gr}(R) < 1$, es decir $R \in \mathbb{K}$ (es constante).
Especializando el polinomio en z,
$$P(z) = (z - z)C(z) + R = R.$$

Es decir, $R = P(z)$.

Teorema del resto

Si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$, entonces

$$P(x) = (x - z)C(x) + P(z),$$

es decir, el resto de la división de $P(x)$ por $x - z$ es $P(z)$.

En particular, de este teorema se deduce que:

Si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$, entonces

$$z \text{ es raíz de } P \iff (x - z) \mid P.$$

Ejemplo 2. Sea $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$. Sabiendo que i es una raíz de P, determinar todas las raíces de P en $\mathbb{C}$.

Solución. Como i es raíz de P y $P \in \mathbb{R}[x]$, $\bar{i} = -i$ también es raíz de P. Entonces, $x - i$ y $x + i$ son polinomios que dividen a P. Luego, $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ divide a P. Realizando la división,

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 4x + 4) = (x - i)(x + i)(x^2 - 4x + 4)$$

Tenemos entonces que

$$P(x) = 0 \iff x = i \quad \text{ó} \quad x = -i \quad \text{ó} \quad x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Finalmente buscamos las raíces de $x^2 - 4x + 4$. Este polinomio tiene una única raíz $x = 2$; de hecho, $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

Respuesta: Todas las raíces de P son i, $-i$ y 2.

Sabemos que no todo polinomio en $\mathbb{R}[x]$ tiene una raíz en $\mathbb{R}$; por ejemplo, conocemos polinomios de grado 2, como ser $x^2 + 1$, sin raíces reales. Sin embargo, también vimos que para estos polinomios de grado 2 siempre podemos hallar raíces en $\mathbb{C}$. Estas observaciones nos hacen plantearnos la siguiente pregunta: ¿existen polinomios no constantes que no tengan raíces en $\mathbb{C}$?
Esta pregunta inquietó a muchos matemáticos a lo largo de la historia. A principios del siglo XIX, se publicaron las primeras demostraciones correctas del siguiente resultado:

Teorema Fundamental del Álgebra (T.F.A.)

Sea $P \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\text{gr}(P) \geq 1$. Entonces existe $z \in \mathbb{C}$ tal que z es raíz de P.

Del teorema también se puede deducir que si $\text{gr}(P) = n$, con $n \geq 1$, el polinomio P tiene (a lo sumo) n raíces en $\mathbb{C}$ y se puede escribir como un producto de n polinomomios de grado 1.
En efecto, si $z_1 \in \mathbb{C}$ es una raíz de P (el T.F.A asegura su existencia), podemos escribir $P(x) = (x - z_1)Q_1(x)$, donde $\text{gr}(Q_1) = n - 1$. Si $\text{gr}(Q_1) \neq 0$, entonces Q_1 también tiene una raíz $z_2 \in \mathbb{C}$. Es decir, $Q_1(x) = (x - z_2)Q_2(x)$ y, entonces, $P(x) = (x - z_1)(x - z_2)Q_2(x)$, donde $\text{gr}(Q_2) = n - 2$. Si seguimos haciendo lo mismo hasta que el cociente sea un polinomio de grado cero, llegamos a escribir a P como

$$P(x) = a(x - z_1)(x - z_2)\dots(x - z_n),$$

donde a es el coeficiente principal de P. Observamos que en esta expresión puede haber factores repetidos, es decir, raíces repetidas (como ocurre para el polinomio del Ejemplo 2). Volveremos sobre esto más adelante, al introducir la noción de *multiplicidad*.

Saber que un polinomio tiene al menos una raíz no es suficiente para encontrarla. Hasta ahora vimos que si el polinomio $P \in \mathbb{K}[x]$ es de grado 1, podemos, despejando, encontrar la única raíz:

$$\text{si } \ P(x) = a_1 x + a_0, \ \text{ entonces } \ z = -\frac{a_0}{a_1}$$

También vimos que si $P \in \mathbb{K}[x]$ es de grado 2, podemos encontrar las raíces aplicando la fórmula resolvente. Pero, ¿qué pasa si $\text{gr}(P) > 2$? ¿Podemos hallar raíces de P?
Lamentablemente, en el siglo XIX los matemáticos Abel y Galois probaron que no hay fórmulas generales para hallar las raíces en $\mathbb{C}$ de cualquier polinomio (salvo en situaciones particulares, como ser polinomios de grado bajo). Trabajaremos con métodos que nos permitirán resolver el problema en algunos casos.

Raíces racionales de un polinomio en $\mathbb{Z}[x]$

El siguiente resultado nos brinda una herramienta para saber si un polinomio con coeficientes enteros tiene raíces racionales y, en caso afirmativo, hallarlas:

Lema de Gauss

Sea $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{Z}[x]$, tal que $a_n \neq 0$ y $a_0 \neq 0$. Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es una raíz de P, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ sin factores primos en común, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

Observemos que el Lema de Gauss no nos dice cuáles son las raíces racionales de P, pero nos propone una lista finita con las candidatas. Es decir, nos permite afirmar que los números racionales que quedan afuera de la lista no son raíces de P. De este modo, si queremos hallar todas las raíces racionales de P, basta hacer la lista de todos los números candidatos y especializar P en cada uno de ellos para ver si es raíz o no.

Apliquemos el Lema de Gauss en algunos ejemplos.

Ejemplo 3. En cada uno de los siguientes casos, hallar todas las raíces racionales de P.

a) $P(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$

b) $P(x) = x^3 - 2x - \dfrac{7}{8}$

Solución.

a) El polinomio $P(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ tiene coeficientes enteros. El Lema de Gauss nos dice que si $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es una raíz de P, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ sin factores primos en común (es decir, una fracción irreducible donde el numerador tiene el signo), entonces $p \mid -1$ (coeficiente constante de P) y $q \mid 2$ (coeficiente principal de P). Es decir, el numerador es $p = 1$ ó $p = -1$ y el denominador es $q = 1$ ó $q = 2$. Entonces, las posibles raíces racionales de P son:

$$1, \quad -1, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}.$$

Al especializar P en cada una de ellas obtenemos:

- $P(1) = 3 \neq 0$
- $P(-1) = -3 \neq 0$
- $P(\frac{1}{2}) = 0$
- $P(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} \neq 0$

con lo cual podemos afirmar que la única raíz racional de P es $\dfrac{1}{2}$.

Respuesta: La única raíz racional de P es $z = \dfrac{1}{2}$.

b) Para poder utilizar el Lema de Gauss, el polinomio debe tener los coeficientes en $\mathbb{Z}$. No es el caso de P ya que $a_0 = -\dfrac{7}{8}$. Sin embargo, las raíces de P son las mismas que las del polinomio

$$Q(x) = 8.P(x) = 8x^3 - 16x - 7.$$

Ahora sí estamos en condiciones de aplicar el lema:

Si $\dfrac{p}{q}$ es una raíz de Q con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ sin factores primos en común, entonces $p \mid -7$ y $q \mid 8$. Es decir, $p = \pm 1$ o $p = \pm 7$ y $q = 1$ o $q = 2$ o $q = 4$ o $q = 8$. Luego, las posibles raíces racionales de Q son:

- ± 1
- $\pm\frac{1}{4}$
- ± 7
- $\pm\frac{7}{4}$
- $\pm\frac{1}{2}$
- $\pm\frac{1}{8}$
- $\pm\frac{7}{2}$
- $\pm\frac{7}{8}$

Especializando en cada uno de los 16 números, comprobamos que la única raíz racional de Q y, por lo tanto también de P, es

$$z = -\frac{1}{2}$$

Respuesta: La única raíz racional de P es $z = -\frac{1}{2}$

Ejemplo 4. Calcular todas las raíces de $P(x) = x^3 - 2x - \frac{7}{8}$ y escribirlo como producto de polinomios de grado 1.

Solución. Por lo realizado anteriormente, sabemos que $z = -\frac{1}{2}$ es una de las raíces (la única racional). Sabemos que, entonces, $(x - (-\frac{1}{2})) = (x + \frac{1}{2}) \mid P$. De este modo, para encontrar las otras raíces, vamos primero a hallar el polinomio $C \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$P(x) = (x + \frac{1}{2})C(x).$$

Dividiendo, llegamos a escribir al polinomio P como:

$$P(x) = (x + \frac{1}{2})(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4})$$

Para finalizar, busquemos las raíces de $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$.
Utilizando la fórmula resolvente,

$$x_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 7}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{4}}}{2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{29}}{4}$$

y, entonces,

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} = (x - \frac{1+\sqrt{29}}{4})(x - \frac{1-\sqrt{29}}{4}).$$

Por lo tanto, las raíces de P son $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1+\sqrt{29}}{4}$ y $z_3 = \frac{1-\sqrt{29}}{4}$ y P se escribe como producto de polinomios de grado 1 como:

$$P(x) = a(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) = (x + \frac{1}{2})(x - \frac{1+\sqrt{29}}{4})(x - \frac{1-\sqrt{29}}{4})$$

(observar que el coeficiente principal de P es $a = 1$).

Respuesta: Las raíces de P son $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{1+\sqrt{29}}{4}$ y $z_3 = \frac{1-\sqrt{29}}{4}$ y se escribe como $P(x) = (x + \frac{1}{2})(x - \frac{1+\sqrt{29}}{4})(x - \frac{1-\sqrt{29}}{4})$.

6.6 Multiplicidad de raíces

Una característica de las raíces de un polinomio es su *multiplicidad*.
Miremos el polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ con el que trabajamos en el Ejemplo 2 de la sección anterior. Vimos que las raíces de P en $\mathbb{C}$ son i, $-i$ y 2; más aún, a partir de lo hecho en el ejemplo, podemos escribir a P como producto de polinomios de grado 1 en $\mathbb{C}[x]$:

$$P(x) = (x-i)(x+i)(x-2)^2.$$

En este caso aparece un único factor $x - i$, correspondiente a la raíz $z = i$, y un único factor $x + i$, correspondiente a $z = -i$. Asociado a la raíz $z = 2$ aparece el factor $x - 2$ dos veces, o sea, $(x-2)^2$.
Diremos entonces que $z = 2$ es una raíz *doble* de P, o que la multiplicidad de $z = 2$ como raíz de P es 2, y que $z = i$ y $z = -i$ son raíces *simples* de P, o que la multiplicidad de $z = i$ o de $z = -i$ como raíz de P es 1. En general,

Multiplicidad - Raíces simples y múltiples

Dados $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$ raíz de P, decimos que la *multiplicidad* de z como raíz de P es $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ si

$$P(x) = (x-z)^k Q(x) \text{ con } Q \in \mathbb{K}[x] \text{ y } Q(z) \neq 0.$$

Si la multiplicidad de una raíz z de P es 1, decimos que z es *raíz simple* de P, mientras que si la multiplicidad es mayor que 1, decimos que z es *raíz múltiple* de P.

Ejemplo 1. Determinar la multiplicidad de $z = 3$ como raíz del polinomio $P(x) = (x^2-9)^3(x+3)(x-3)^2$.

Solución. Factorizamos $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. Luego, el polinomio P se puede escribir como:

$$P(x) = [(x-3)(x+3)]^3(x+3)(x-3)^2$$

Distribuyendo la potencia,

$$P(x) = (x-3)^3(x+3)^3(x+3)(x-3)^2$$

y, agrupando,

$$P(x) = (x-3)^5(x+3)^4$$

El factor $x - 3$ correspondiente a la raíz $z = 3$ aparece elevado al exponente 5, y el polinomio $(x+3)^4$ no se anula en $z = 3$. Por lo tanto,

Respuesta: la multiplicidad de $z = 3$ como raíz de P es 5.

Veamos ahora el siguiente ejemplo, en el que vamos a construir un polinomio que cumpla una serie de condiciones dadas.

Ejemplo 2. Hallar $P \in \mathbb{C}[x]$ de grado mínimo que tenga a 2 como raíz, a $3i$ como raíz múltiple y que verifique $P(0) = 36$.

Solución. Para empezar, listemos las características que debe tener el polinomio P:

- Los coeficientes de P son números complejos.
- $(x-2) \mid P$ (porque 2 es raíz).
- $(x-3i)^k \mid P$ para algún $k > 1$ (porque $3i$ es raíz múltiple).
- $P(0) = 36$.
- Si Q es otro polinomio que verifica las condiciones anteriores, entonces $\text{gr}(Q) \geq \text{gr}(P)$.

Mirando las tres primeras características, proponemos:

$$P(x) = A(x-2)(x-3i)^k \text{ con } A \in \mathbb{C}$$

y, para que se cumpla la última (es decir, que el polinomio tenga el menor grado posible), proponemos $k = 2$. Como además debe valer $P(0) = 36$,

$$A(0-2)(0-3i)^2 = 36 \iff A(-2)(-3i)^2 = 36 \iff 18A = 36 \iff A = 2$$

Respuesta: $P(x) = 2(x-2)(x-3i)^2 = 2x^3 - (4+12i)x^2 - (18-24i)x + 36$.

¿Cómo cambiaría la resolución anterior si buscáramos un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$?

Ejemplo 3. Hallar $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado mínimo que tenga a 2 como raíz, a $3i$ como raíz múltiple y que verifique $P(0) = 36$.

Solución. En primer lugar, observemos que el polinomio de la respuesta anterior no nos sirve, porque no tiene todos los coeficientes en $\mathbb{R}$. Para encontrar un polinomio que cumpla lo pedido, debemos tener en cuenta que si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de P, $\bar{z}$ también lo es. Entonces, el polinomio P debe cumplir:

- Los coeficientes de P son números reales.
- $(x-2) \mid P$ (porque 2 es raíz).
- $(x-3i)^k \mid P$ para algún $k > 1$ (porque $3i$ es raíz múltiple).
- $(x+3i) \mid P$ (porque $\overline{3i} = -3i$ es raíz de P).
- $P(0) = 36$.
- Si Q es otro polinomio que verifica las condiciones anteriores, entonces $\text{gr}(Q) \geq \text{gr}(P)$.

Si propusiéramos como respuesta el polinomio $P(x) = A(x-2)(x-3i)^2(x+3i)$, sus coeficientes no serían todos reales: como $P(0) = 36$, el número A debería ser igual a $-\frac{2}{3}i$. Es decir, el coeficiente principal de P sería $-\frac{2}{3}i \notin \mathbb{R}$.

Entonces, debemos "agregarle" otra raíz. Tomando $-3i$, el producto $(x-3i)(x+3i)$ queda igual a x^2+9, que tiene coeficientes en $\mathbb{R}$. Proponemos entonces

$$P(x) = A(x-2)(x-3i)^2(x+3i)^2.$$

Como $P(0) = 36$, deducimos que $A = -\frac{2}{9}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{2}{9}(x-2)(x-3i)^2(x+3i)^2 \\ &= -\frac{2}{9}(x-2)(x^2+9)^2 = -\frac{2}{9}x^5 + \frac{4}{9}x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 18x + 36 \end{aligned}$$

Respuesta: $P(x) = -\frac{2}{9}x^5 + \frac{4}{9}x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 18x + 36$.

Lo que vimos en el ejemplo anterior vale en general: si $P \in \mathbb{R}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces z es una raíz de P de multiplicidad k si y sólo si $\bar{z}$ es una raíz de P de multiplicidad k.

Una propiedad muy útil para determinar la multiplicidad de una raíz de un polinomio $P \in \mathbb{K}[x]$ es la siguiente:

Sean $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$ una raíz de P. Entonces,

$$z \text{ tiene multiplicidad } k \iff \begin{array}{l} P(z) = 0,\ \partial P(z) = 0,\ \partial^2 P(z) = 0, \ldots, \partial^{k-1}P(z) = 0 \\ \text{y } \partial^k P(z) \neq 0. \end{array}$$

donde $\partial P \in \mathbb{K}[x]$ es el *polinomio derivado* de P, definido por $\partial P(x) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1}$, $\partial^2 P = \partial(\partial P)$, $\partial^3 P = \partial(\partial^2 P), \ldots, \partial^k P = \partial(\partial^{k-1}P)$.

Ejemplo 4. Determinar la multiplicidad de $z = 1$ como raíz de

$$P(x) = x^5 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{13}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 1$$

Solución. Calculemos:

- $P(1) = 1 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{13}{2} - \frac{9}{2} + 1 = 0$
- $\partial P(x) = 5x^4 - 6x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 13x - \frac{9}{2}$ y $\partial P(1) = 5 - 6 - \frac{15}{2} + 13 - \frac{9}{2} = 0$
- $\partial^2 P(x) = 20x^3 - 18x^2 - 15x + 13$ y $\partial^2 P(1) = 20 - 18 - 15 + 13 = 0$
- $\partial^3 P(x) = 60x^2 - 36x - 15$ y $\partial^3 P(1) = 60 - 36 - 15 \neq 0$

Respuesta: $z = 1$ es una raíz de P de multiplicidad 3.