Capítulo 5

Transformaciones lineales

En lo que sigue vamos a trabajar con una clase de funciones $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ que tienen dominio $\mathbb{V}$ y codominio $\mathbb{W}$ que son espacios vectoriales. Estas funciones son muy importantes pues preservan las estructuras de los espacios vectoriales, respetando sumas y productos por escalares.

5.1. Definiciones básicas

Transformación lineal

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Una función $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se llama una *transformación lineal* si cumple las siguientes condiciones:

1. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$.
2. Dados $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$.

Por brevedad usaremos la abreviatura t.l. para las transformaciones lineales.

Por ejemplo, son transformaciones lineales:

1. $O\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, tal que $O(\mathbf{v}) = O$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, llamada transformación lineal *nula*.
2. $id\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, tal que $id(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, llamada transformación lineal *identidad*.

Es fácil ver que ambas funciones cumplen las condiciones de t.l.,

$$\begin{aligned} O(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= O = O + O = O(\mathbf{v}) + O(\mathbf{w}) \checkmark \\ O(\alpha\mathbf{v}) &= O = \alpha O = \alpha O(\mathbf{v}) \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} id(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \mathbf{v}+\mathbf{w} = id(\mathbf{v}) + id(\mathbf{w}) \checkmark \\ id(\alpha\mathbf{v}) &= \alpha\mathbf{v} = \alpha\, id(\mathbf{v}) \checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo 1. Verificar que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_3)$ es una transformación lineal.

Solución: f es una función que va del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Para ver que es una transformación lineal tenemos que ver que se verifican las dos condiciones de la definición:

1. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= (u_1 + v_1 - (u_2 + v_2), 2(u_1 + v_1) + u_3 + v_3) \\ &= (u_1 - u_2 + v_1 - v_2, 2u_1 + u_3 + 2v_1 + v_3) \\ &= (u_1 - u_2, 2u_1 + u_3) + (v_1 - v_2, 2v_1 + v_3) \\ &= f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \quad ✔ \end{aligned}$$

2. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{u}) &= (\alpha u_1 - \alpha u_2, 2\alpha u_1 + \alpha u_3) \\ &= (\alpha(u_1 - u_2), \alpha(2u_1 + u_3)) \\ &= \alpha(u_1 - u_2, 2u_1 + u_3) \\ &= \alpha f(\mathbf{u}) \quad ✔ \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Decidir si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (0, xy)$ es una transformación lineal.

Solución: Si intentamos ver que se cumple la propiedad 1 de la definición tomando $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, se tiene que

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (0, (u_1 + v_1)(u_2 + v_2)) = (0, u_1u_2 + u_1v_2 + v_1u_2 + v_1v_2)$$

y

$$f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = (0, u_1u_2) + (0, v_1v_2) = (0, u_1u_2 + v_1v_2),$$

así que $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ si y sólo si $u_1v_2 + v_1u_2 = 0$.
Para ver que esto no se verifica siempre, vamos a mostrar un contraejemplo, o sea un par de vectores para los cuales $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \neq f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$.
Tomemos $\mathbf{u} = (1, 2)$ y $\mathbf{v} = (-2, 3)$. Se tiene que $f(\mathbf{u}) = (0, 2)$ y $f(\mathbf{v}) = (0, -6)$, así que

$$f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = (0, -4).$$

Por otro lado,

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(-1, 5) = (0, -5).$$

Como $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \neq f(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ concluimos que f no es t.l.

Respuesta: f no es una transformación lineal.

Ejemplo 3. Caracterizar todas las transformaciones lineales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Solución: Caracterizar se refiere a decir qué aspecto tienen estas t.l.
Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $x = x \cdot 1$ y, aplicando la condición 2 de t.l., $f(x) = xf(1)$, así que estas t.l. solo dependen de cuánto vale $f(1)$. Si escribimos $f(1) = a \in \mathbb{R}$, nos queda

$$f(x) = a \cdot x.$$

Es fácil verificar que estas funciones son t.l., es decir, que cumplen las dos propiedades de la definición. Podemos decir entonces que:

$\boxed{\text{Respuesta: Todas las t.l. } f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ son las funciones de la forma } f(x) = a \cdot x, \text{ con } a \in \mathbb{R}.}$

Más generalmente, a partir de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se puede definir una t.l. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es una t.l.

En forma abreviada escribiremos $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ pensando a los vectores como columnas.

Veamos que esta función cumple las propiedades de una t.l.:

1. Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vectores de $\mathbb{R}^n$,
$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A \cdot \mathbf{x} + A \cdot \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \checkmark$$
2. Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$f(\alpha\mathbf{x}) = A \cdot (\alpha\mathbf{x}) = \alpha(A \cdot \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \checkmark$$

Se puede probar que toda t.l $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es de la forma $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Más adelante trataremos este tema.

Propiedades

Si $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal, entonces:

1. $f(O_{\mathbb{V}}) = O_{\mathbb{W}}$, para $O_{\mathbb{V}}$ y $O_{\mathbb{W}}$ los vectores nulos de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respetivamente.
2. $f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.
3. $f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w})$ para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$.
4. $f(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k) = \alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{v}_2) + \ldots + \alpha_k f(\mathbf{v}_k)$, para todos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{V}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Demostración: Usamos las propiedades 1 y 2 de la definición de transformación lineal y propiedades de la suma y el producto por escalares en espacios vectoriales.

1. $f(O_{\mathbb{V}}) = f(0 \cdot O_{\mathbb{V}}) = 0 \cdot f(O_{\mathbb{V}}) = O_{\mathbb{W}}$.
2. $f(-\mathbf{v}) = f((-1)\mathbf{v}) = (-1)f(\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})$.
3. $f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = f(\mathbf{v} + (-\mathbf{w})) = f(\mathbf{v}) + f(-\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w})$.
4. $$\begin{aligned} f(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k) &= f((\alpha_1\mathbf{v}_1) + (\alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k)) \\ &= f(\alpha_1\mathbf{v}_1) + f(\alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k) \\ &= \ldots \\ &= f(\alpha_1\mathbf{v}_1) + f(\alpha_2\mathbf{v}_2) + \ldots + f(\alpha_k\mathbf{v}_k) \\ &= \alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{v}_2) + \ldots + \alpha_k f(\mathbf{v}_k). \end{aligned}$$

La propiedad 1 es muy útil para descartar funciones que no sean t.l., por ejemplo:

Ejemplo 4. Decidir si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y) = (x - y, 2x + y, 3)$ es una transformación lineal.

Solución: Esta función no es una t.l. pues $f(0,0) = (0,0,3) \neq (0,0,0)$.

La propiedad 4 se usa para demostar el siguiente (y muy importante) teorema:

Teorema (de existencia y unicidad de t.l.)

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales. Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ son vectores de $\mathbb{W}$ (no necesariamente distintos), entonces existe una única transformación lineal $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tal que:

$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \\ f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \\ \qquad \vdots \\ f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n. \end{cases}$$

Este teorema nos está indicando que es posible conocer a una t.l. a partir de cuánto vale en una base. Veamos ejemplos de esto.

Ejemplo 5. Hallar la expresión de la única t.l. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que verifica:

$$\begin{cases} f(1,-1) &= (1,0,-5) \\ f(0,2) &= (-2,4,6) \end{cases}$$

Solución:

- ✮ Lo primero que tenemos que hacer es verificar que f está definida sobre una base de $\mathbb{R}^2$:

  En este caso es fácil de justificar que $B = \{(1,-1),(0,2)\}$ es base de este espacio vectorial pues está formado por dos vectores no múltiplos.

- ✮ Buscamos las coordenadas en base B de un vector genérico de $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y) = \alpha(1,-1) + \beta(0,2) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha & & & = & x \\ -\alpha & + & 2\beta & = & y \end{array} \right.$$

  Resolvemos el sistema y obtenemos $\alpha = x$ y $\beta = \frac{x+y}{2}$, o sea:

$$(x,y) = x(1,-1) + \frac{x+y}{2}(0,2)$$

- ✮ Ahora aplicamos f a la igualdad anterior

$$f(x,y) = f\left(x(1,-1) + \frac{x+y}{2}(0,2)\right),$$

  usamos que f es t.l. así que "separa en sumas" y "saca escalares afuera"

$$f(x,y) = xf(1,-1) + \frac{x+y}{2}f(0,2),$$

  reemplazamos $f(1,1)$ y $f(0,2)$,

$$f(x,y) = x(1,0,-5) + \frac{x+y}{2}(-2,4,6)$$

  y, por último, juntamos la expresión de la derecha

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x,0,-5x) + (-x-y, 2x+2y, 3x+3y) \\ &= (-y, 2x+2y, -2x+3y) \end{aligned}$$

- ✮ Ya tenemos la expresión de la t.l. Es importante verificar que cumple las condiciones pedidas:

$$\begin{aligned} f(1,-1) &= (1, 2-2, -2-3) = (1,0,-5) \quad ✔ \\ f(0,2) &= (-2,4,6) \quad ✔ \end{aligned}$$

  $\boxed{\text{Respuesta: } f(x,y) = (-y, 2x+2y, -2x+3y).}$

Ejemplo 6. Hallar la expresión de la única t.l. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que verifica:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(1,1) & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f(1,0) & = & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Solución: Vamos a proceder como en el ejemplo anterior.

- ✯ Verificamos que f está definida sobre una base de $\mathbb{R}^2$: en este caso, $B = \{(1,1),(1,0)\}$.
- ✯ Buscamos las coordenadas en base B de un vector genérico de $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(1,0) \iff \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha = y \end{cases}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos $\alpha = y$ y $\beta = x - y$, o sea:

$$(x,y) = y(1,1) + (x-y)(1,0).$$

- ✯ Aplicamos f a la igualdad anterior, usamos las propiedades que tiene f por ser una t.l. y los valores de $f(1,1)$ y $f(1,0)$ dados:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f\big(y(1,1) + (x-y)(1,0)\big) \\ &= y\,f(1,1) \;+\; (x-y)f(1,0) \\ &= y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, hacemos las operaciones y obtenemos la expresión para f:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y & -x+y \\ x-y & y \end{pmatrix}$$

- ✯ Verificación:

$$f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1+1 \\ 1-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ✔$$

$$f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1+0 \\ 1-0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ✔$$

$$\boxed{\text{Respuesta: } f(x,y) = \begin{pmatrix} y & -x+y \\ x-y & y \end{pmatrix}.}$$

Ejemplo 7. Decidir si existe una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica:

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (1,2,-1) \\ f(0,1,0) = (1,1,2) \\ f(1,2,0) = (3,4,5) \end{cases}$$

Solución: Este ejemplo es diferente al anterior pues los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,2,0)$ no forman base de $\mathbb{R}^3$, dado que el tercer vector es combinación lineal de los otros dos vectores, así que no podemos usar el teorema anterior. Para decidir si existe alguna t.l. que cumpla las condiciones vamos a hacer lo siguiente:

Como $(1,2,0) = (1,0,0) + 2(0,1,0)$, toda t.l. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ debe verificar que

$$f(1,2,0) = f(1,0,0) + 2f(0,1,0).$$

Veamos si con las condiciones del enunciado se verifica esta igualdad:

$$f(1,0,0) + 2f(0,1,0) = (1,2,-1) + 2(1,1,2) = (3,4,3) \neq (3,4,5) = f(1,2,0) \quad ✘$$

Respuesta: no existe ninguna t.l. que verique lo pedido.

Ejemplo 8. Decidir si existe una t.l. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica:

$$\begin{cases} f(1,0,0) &= (1,2,-1) \\ f(0,1,0) &= (1,1,2) \\ f(1,2,0) &= (3,4,3) \end{cases}$$

Solución: Si miramos el ejemplo anterior no necesitamos volver a hacer las cuentas, en este ejemplo sí se verifica

$$f(1,2,0) = f(1,0,0) + 2f(0,1,0) \quad ✔$$

En este caso la t.l. no es única, la tercera condición la sacamos pues no aporta nada. Podemos definir distintas transformaciones lineales extendiendo el conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ a una base de $\mathbb{R}^3$ y definiendo f sobre el vector agregado para completar la base. Lo más fácil es agregar el vector $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ para tener la base canónica.
Por ejemplo, si pedimos que $f(0,0,1) = (2,5,0)$ tenemos una t.l.,

$$f(x,y,z) = (x+y+2z, 2x+y+5z, -x+2y),$$

y si elegimos que $f(0,0,1) = (0,3,-1)$ obtenemos otra t.l.

$$f(x,y,z) = (x+y, 2x+y+3z, -x+2y-z).$$

Queda como ejercicio para el lector verificar que ésas son las fórmulas que se obtienen en cada caso y que estas t.l. verifican las condiciones pedidas.

Respuesta: Existen (infinitas) t.l. que verifican lo pedido.

Imagen y preimagen de conjuntos por transformaciones lineales

Imagen y preimagen

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ espacios vectoriales, $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ y $\mathbb{T} \subset \mathbb{W}$. Definimos

- $f(\mathbb{S}) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{W} : \mathbf{w} = f(\mathbf{s}), \text{ con } \mathbf{s} \in \mathbb{S}\}$ (*la imagen de* $\mathbb{S}$ *por* f)
- $f^{-1}(\mathbb{W}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} : f(\mathbf{v}) \in \mathbb{W}\}$ (*la preimagen de* $\mathbb{W}$ *por* f)

Observación. La notación f^{-1} puede prestarse a confusiones: salvo algunos casos que veremos luego, esto NO se refiere a la función inversa de f.

Si el conjunto $\mathbb{W}$ tiene un único elemento, $\mathbb{W} = \{\mathbf{w}\}$, al conjunto $f^{-1}(\{\mathbf{w}\})$ lo notaremos $f^{-1}(\mathbf{w})$, o sea,

- $f^{-1}(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} : f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$ (*la preimagen del vector* $\mathbf{w}$ *por* f)

Propiedades de la imagen y la preimagen de subespacios

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal.

1. Si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$, entonces $f(\mathbb{S})$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.
2. Si $\mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{W}$, entonces $f^{-1}(\mathbb{T})$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.
3. Si $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$, entonces $f(\mathbb{S}) = \langle f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_r) \rangle$.

Demostración:

1. Esta verificación queda como ejercicio ya que es similar a la de la propiedad 2.
2. Para demostrar que un conjunto es un subespacio de $\mathbb{V}$ tenemos que verificar que se cumplen las tres propiedades de los subespacios.

    1) $\mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{W}$ así que $O_{\mathbb{W}} \in \mathbb{T}$. Como f es t.l., $f(O_{\mathbb{V}}) = O_{\mathbb{W}}$ entonces $f(O_{\mathbb{V}}) \in \mathbb{T}$ con lo cual tenemos que $O_{\mathbb{V}} \in f^{-1}(\mathbb{T})$.
    2) Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in f^{-1}(\mathbb{T})$. Esto significa que $f(\mathbf{u}) \in \mathbb{T}$ y $f(\mathbf{v}) \in \mathbb{T}$, pero $\mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{W}$, entonces $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \in \mathbb{T}$.
    Si usamos la propiedad 1 de t.l., $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, así que $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in \mathbb{T}$, con lo cual obtenemos que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in f^{-1}(\mathbb{T})$.
    3) Sean $\mathbf{v} \in f^{-1}(\mathbb{T})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $f(\mathbf{v}) \in \mathbb{T}$ y, como $\mathbb{T}$ es subespacio de $\mathbb{W}$, tenemos que $\alpha f(\mathbf{v}) \in \mathbb{T}$.
    Ahora usamos la propiedad 2 de las t.l., $\alpha f(\mathbf{v}) = f(\alpha \mathbf{v})$. Entonces $f(\alpha \mathbf{v}) \in \mathbb{T}$, lo que significa que $\alpha \mathbf{v} \in f^{-1}(\mathbb{T})$.

3. Sea $\mathbf{w} \in f(\mathbb{S})$, entonces $\mathbf{w} = f(\mathbf{s})$ con $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$. Como $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$,

$$\mathbf{s} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_r \mathbf{v}_r$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$. Aplicando f obtenemos que

$$f(\mathbf{s}) = f(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_r \mathbf{v}_r) = \alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_r f(\mathbf{v}_r).$$

Entonces $\mathbf{w} = f(\mathbf{s}) \in \langle f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_r) \rangle$.
Con esto probamos que $f(\mathbb{S}) \subseteq \langle f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_r) \rangle$.
Por otro lado, $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_r) \in f(\mathbb{S})$, con lo cual, $\langle f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_r) \rangle \subset f(\mathbb{S})$, así que los subespacios son iguales.

Ejemplo 9. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. definida por

$$f(x,y,z) = (x+y-z, y+2z, x+2y+z);$$

y sean $\mathbb{S} = \langle(1,2,0)\rangle$, $\mathbf{w} = (0,2,2)$ y $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
Hallar $f(\mathbb{S})$, $f^{-1}(\mathbf{w})$ y $f^{-1}(\mathbb{W})$.

Solución: Teniendo en cuenta la propiedad 3, para calcular $f(\mathbb{S})$ lo que hacemos es aplicar f al generador de $\mathbb{S}$, $f(1,2,0) = (3,2,5)$ y este vector genera $f(\mathbb{S})$, o sea,

$$\boxed{f(\mathbb{S}) = \langle(3,2,5)\rangle.}$$

Ahora calculemos la preimagen de $\mathbf{w}$. Para esto buscamos los vectores de $\mathbb{R}^3$ "que van a parar a él" cuando aplicamos la t.l.,

$$f(x,y,z) = (x+y-z, y+2z, x+2y+z) = (0,2,2).$$

Obtenemos entonces un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es un S.C.I cuyas soluciones son de la forma $\lambda(3,-2,1) + (-2,2,0)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\boxed{f^{-1}(\mathbf{w}) = \lambda(3,-2,1) + (-2,2,0) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Para calcular la preimagen de $\mathbb{W}$ vamos a aprovechar que este subespacio está dado por una ecuación y pedir que los vectores que obtenemos al aplicar la t.l. cumplan esta ecuación:

$$\mathbf{v} = (x,y,z) \in f^{-1}(\mathbb{W}) \iff f(\mathbf{v}) = (x+y-z, y+2z, x+2y+z) \in \mathbb{W}$$

$$\iff (x+y-z) + (y+2z) + (x+2y+z) = 0 \iff 2x+4y+2z = 0$$

Por lo tanto,

$$\boxed{f^{-1}(\mathbb{W}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x+4y+2z = 0\} = \langle(-2,1,0),(-1,0,1)\rangle.}$$

5.2. Núcleo e imagen de una transformación lineal

Ahora vamos a definir dos conjuntos muy importantes, asociados a una transformación lineal, que son casos especiales de los conjuntos que vimos en la sección anterior.

Núcleo e imagen de una t.l.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ espacios vectoriales, $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Llamamos

- *núcleo de* f al conjunto
$$\mathrm{Nu}(f) = f^{-1}(O) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} : f(\mathbf{v}) = O\}.$$
- *imagen de* f al conjunto
$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{V}) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{W} : \mathbf{w} = f(\mathbf{v}), \text{ con } \mathbf{v} \in \mathbb{V}\}.$$

Antes de hacer ejemplos, veamos algunas propiedades que se deducen de las propiedades de imágenes y preimágenes de subespacios por una t.l. y que nos van a ayudar para calcular núcleos e imágenes.

Propiedades

1. $\mathrm{Nu}(f)$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.
2. $\mathrm{Im}(f)$ es un subespcio de $\mathbb{W}$.
3. Si $\mathbb{V} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ entonces $\mathrm{Im}(f) = \langle f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_r) \rangle$.

Ejemplo 1. Hallar bases y calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen de f, si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la t.l. dada por

$$f(x,y,z) = (x + 2y - z, y + z, -x - y + 2z).$$

Solución: Para hallar el núcleo de f debemos encontrar los vectores $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(x,y,z) = (0,0,0)$, así que igualamos a 0 cada una de las componentes de la t.l., obteniendo el siguiente sistema homogéneo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Trabajamos con la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz es igual a 2, entonces $\dim(\mathrm{Nu}(f)) = 3 - 2 = 1$. Despejando hallamos una base de $\mathrm{Nu}(f)$:

$$\mathbf{x} = (3z, -z, z) = z(3, -1, 1), \text{ con } z \in \mathbb{R},$$

y, entonces, una base es $B_{\mathrm{Nu}(f)} = \{(3,-1,1)\}$.

Para hallar la imagen usamos la propiedad 3. Lo más cómodo es tomar la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\rangle = \langle (1,0,-1), (2,1,-1), (-1,1,2)\rangle.$$

Para ver si el conjunto de generadores de la imagen es un conjunto l.i o l.d planteamos la siguiente combinación lineal:

$$\alpha(1,0,-1) + \beta(2,1,-1) + \gamma(-1,1,2) = (0,0,0)$$

que da lugar a las ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 0 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ -\alpha & - & \beta & + & 2\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

Es el mismo sistema que el del núcleo, así que no vamos a repetir la triangulación. Obtenemos que el conjunto es linealmente dependiente, necesitamos entonces extraer una base. Procedemos de manera similar a lo hecho en el Capítulo 4: miramos la última matriz del sistema donde están marcados los lugares principales y notamos que las dos primeras columnas corresponden a vectores linealmente independientes.

$$\left(\begin{array}{ccr|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La dimensión de $\mathrm{Im}(f)$ es igual a 2 y una base es $B_{\mathrm{Im}(f)} = \{(1,0,-1), (2,1,-1)\}$.

Respuesta:

- $B_{\mathrm{Nu}(f)} = \{(3,-1,1)\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y $\dim(\mathrm{Nu}(f)) = 1$.
- $B_{\mathrm{Im}(f)} = \{(1,0,-1), (2,1,-1)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(f)$ y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

Ejemplo 2. Hallar bases y calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen de la t.l. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x-y & 0 \\ 2x-2y & -x+y \end{pmatrix}.$$

Solución: El núcleo de f está formado por todos los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x,y) = O$:

$$\begin{pmatrix} x-y & 0 \\ 2x-2y & -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ 2x & - & 2y & = & 0 \\ -x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \iff x-y=0.$$

Es decir, $(x,y) = (y,y) = y(1,1)$, con $y \in \mathbb{R}$.

Entonces, una base de $\text{Nu}(f)$ es $B_{\text{Nu}(f)} = \{(1,1)\}$ y $\dim(\text{Nu}(f)) = 1$.
Buscamos ahora la imagen de f. Para esto, en primer lugar hallamos un sistema de generadores de $\text{Im}(f)$ aplicando f a los vectores de una base de $\mathbb{R}^2$:

$$\text{Im}(f) = \langle f(1,0), f(0,1)\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Como $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, vemos que una base de $\text{Im}(f)$ es $B_{\text{Im}(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim(\text{Im}(f)) = 1$.

Respuesta:

- $B_{\text{Nu}(f)} = \{(1,1)\}$ es una base de $\text{Nu}(f)$ y $\dim(\text{Nu}(f)) = 1$.
- $B_{\text{Im}(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\text{Im}(f)$ y $\dim(\text{Im}(f)) = 1$.

Teorema de la dimensión para transformaciones lineales

Las dimensiones del núcleo y de la imagen de una transformación lineal cumplen una relación, que está dada por el siguiente teorema:

Teorema de la dimensión

Si $f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal, entonces:

$$\dim(\text{Nu}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{V}).$$

Ejemplo 3. Hallar bases de $\text{Nu}(f)$ e $\text{Im}(f)$ y calcular sus dimensiones para las siguientes t.l.:

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y) = (x-y, 2x+4y, x+2y)$

b) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2-x_4, x_1+x_3+2x_4, x_1-2x_2+2x_3)$

c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la única t.l que verifica:

$$\begin{cases} f(1,1,1) &= (-1,2,3) \\ f(0,1,2) &= (0,1,4) \\ f(0,0,1) &= (0,0,0) \end{cases}$$

Solución:

a) $f(x,y) = (x-y, 2x+4y, x+2y)$.
Comencemos calculando la imagen:

$$\text{Im}(f) = \langle f(1,0), f(0,1)\rangle = \langle (1,2,1), (-1,4,2)\rangle.$$

Es claro que son vectores l.i. así que tenemos que $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2}$,

y una base de $\mathrm{Im}(f)$ es $\boxed{B_{\mathrm{Im}(f)} = \{(1,2,1),(-1,4,2)\}}$.

Para el núcleo vamos a usar el teorema de la dimensión,

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

entonces $2 = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + 2 \Longrightarrow \boxed{\dim(\mathrm{Nu}(f)) = 0}$.

El único subespacio de dimensión 0 es el subespacio nulo, así que $\mathrm{Nu}(f) = \{(0,0)\}$ y este subespacio no tiene base.

b) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + x_2 - x_4, x_1 + x_3 + 2x_4, x_1 - 2x_2 + 2x_3)$. En este caso vamos a calcular primero el núcleo, y para esto resolvemos el sistema homogéneo que se obtiene al igualar a 0 cada una de las coordenadas de $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

Escribiendo las ecuaciones y despejando queda lo siguiente:

$\mathbf{x} \in \mathrm{Nu}(f) \Longleftrightarrow \mathbf{x} = (6x_4, -5x_4, -8x_4, x_4) = x_4(6,-5,-8,1)$

Obtenemos que $\boxed{\dim(\mathrm{Nu}(f)) = 1}$ y que una base de este subespacio es

$\boxed{B_{\mathrm{Nu}(f)} = \{(6,-5,-8,1)\}}$.

Ahora vamos a usar el teorema de la dimensión,

$$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 + \dim(\mathrm{Im}(f)) \Longrightarrow \boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3}$$

Nos quedó entonces que la dimensión de la $\mathrm{Im}(f)$ es igual a 3, y como la imagen es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, porque $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, entonces $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$. Como base de $\mathrm{Im}(f)$ podemos tomar cualquier base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo, $\boxed{B_{\mathrm{Im}(f)} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}}$.

c)

$$\begin{cases} f(1,1,1) &= (-1,2,3) \\ f(0,1,2) &= (0,1,4) \\ f(0,0,1) &= (0,0,0) \end{cases}$$

En este caso tenemos la t.l. definida en una base de $\mathbb{R}^3$. Observamos que, para hallar la imagen, no es necesario que encontremos la expresión ya que

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(1,1,1), f(0,1,2), f(0,0,1)\rangle = \langle (-1,2,3),(0,1,4),(0,0,0)\rangle.$$

Ahora extraemos una base de este conjunto, sacando el vector nulo. Obtenemos que una base es $\boxed{B_{\mathrm{Im}(f)} = \{(-1,2,3),(0,1,4)\}}$ y que $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f) = 2.}$

Antes de buscar el núcleo usamos el teorema de la dimensión,

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + 2 \Longrightarrow \boxed{\dim(\mathrm{Nu}(f)) = 1.}$$

Al mirar la definición de la t.l, notamos que $(0,0,1) \in \text{Nu}(f)$, ya que $f(0,0,1) = (0,0,0)$, y como el núcleo es un subespacio de dimensión 1, este vector forma una base de dicho subespacio, o sea $\boxed{B_{\text{Nu}(f)} = \{(0,0,1)\}.}$

Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos

En lo que sigue estudiamos las propiedades de inyectividad, suryectividad y biyectividad usuales para funciones en el caso particular de las t.l.

Definiciones

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales y $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Decimos que:

- f es *monomorfismo* si es una función inyectiva (o sea: si cumple la condición "$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \Longrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$")
- f es *epimorfismo* si es una función suryectiva (o sea: si $\text{Im}(f) = \mathbb{W}$)
- f es *isomorfismo* si es monomorfismo y epimorfismo.

Propiedades

1. f es monomorfismo $\Longleftrightarrow \text{Nu}(f) = \{O\}$
2. Si f es monomorfismo y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente, entonces $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_r)\}$ es linealmente independiente.
3. f es isomorfismo si y sólo si se cumple: "Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es una base de $\mathbb{V}$, entonces $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_r)\}$ es una base de $\mathbb{W}$."

Demostración:

1. Hay que probar dos implicaciones.

   $\Longrightarrow$) Por ser t.l. $f(O) = O \Longrightarrow O \in \text{Nu}(f)$ y tenemos que probar que no hay ningún otro elemento en ese conjunto.

   Tomamos un elemento $\mathbf{v} \in \text{Nu}(f) \Longrightarrow f(\mathbf{v}) = O$, igualando obtenemos que $f(\mathbf{v}) = f(O)$ pero f es un monomorfismo, lo que significa que es una función inyectiva, así que $\mathbf{v} = O$ y por lo tanto $\text{Nu}(f) = \{O\}$.

   $\Longleftarrow$) Para probar la inyectividad tomamos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$ que cumplen $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w})$ y debemos probar que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w}) &\Longrightarrow f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w}) = O \Longrightarrow f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = O \\
&\Longrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} \in \text{Nu}(f) = \{O\} \Longrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} = O \Longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}.
\end{aligned}
$$

2. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ un conjunto l.i. Vamos a probar que $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_r)\}$ también es l.i.

   Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tales que

   $$\alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{v}_2) + \ldots + \alpha_r f(\mathbf{v}_r) = O.$$

   Usando que f es una t.l. obtenemos que

   $$f(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_r \mathbf{v}_r) = O$$

   y entonces

   $$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_r \mathbf{v}_r \in \mathrm{Nu}(f).$$

   En 1. demostramos que si f es monomorfismo entonces $\mathrm{Nu}(f) = \{O\}$, por lo tanto,

   $$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_r \mathbf{v}_r = O.$$

   Por hipótesis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es l.i., entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$ y queda demostrada la propiedad.

3. Queda como ejercicio.

Ejemplo 4. Calcular $\dim(\mathrm{Nu}(f))$ y $\dim(\mathrm{Im}(f))$ para las siguientes t.l.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ monomorfismo.

b) $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ epimorfismo.

c) $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es la única t.l. que verifica

$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_1) &=& \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{v}_2) &=& -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\ f(\mathbf{v}_3) &=& \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3 \end{cases}$$

donde $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{V}$.

Solución: En todos los casos vamos a usar el teorema de la dimensión.

a) f es monomorfismo así que $\boxed{\dim(\mathrm{Nu}(f)) = 0}$, y el dominio de la t.l. es $\mathbb{R}^3$, con lo cual

   $3 = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 0 + \dim(\mathrm{Im}(f))$.

   Entonces $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3.}$

b) f es un epimorfismo, entonces $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, así que $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3}$ y

   $5 = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + 3$.

   Por lo tanto, $\boxed{\dim(\mathrm{Nu}(f)) = 2.}$

c) Como f está definida sobre una base podemos afirmar que

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), f(\mathbf{v}_3)\rangle = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3\rangle.$$

Es cómodo utilizar las coordenadas de estos vectores en la base B para calcular la dimensión de la imagen de f,

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)_B = (1,1,0),\ (-\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)_B = (0,-1,1) \text{ y } (\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3)_B = (1,0,2).$$

$\{(1,1,0), (0,-1,1), (1,0,2)\}$ es un conjunto l.i. (¡verificarlo!), así que $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3}$.

Y por el teorema de la dimensión,

$$3 = \dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + 3 \Longrightarrow \boxed{\dim(\mathrm{Nu}(f)) = 0}$$

Es interesante notar que esta t.l. es un isomorfismo.

Ejemplo 5. Definir, en cada caso, una t.l. que verifique las condiciones pedidas.

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(1,2,3) \in \mathrm{Nu}(f)$ y f es epimorfismo.

b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $(1,-2,3,1) \in \mathrm{Im}(f)$ y f es monomorfismo.

c) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Im}(f) = \langle(1,2,0,9), (0,1,3,2)\rangle$.

Solución: En todos los casos vamos a definir las t.l. sobre bases convenientes (no vamos a buscar las expresiones de las t.l.)

a) Elegimos una base del dominio ($\mathbb{R}^3$ en este caso) que contenga al vector que queremos que esté en el núcleo, por ejemplo, $\{(1,2,3); (0,1,0); (0,0,1)\}$ y ahora definimos la t.l. sobre esta base, teniendo en cuenta que el vector $(1,2,3)$ debe ir al $(0,0)$ y que f debe ser epimorfismo, así que la dimensión de la imagen de f deber ser igual a 2.

Definimos f como la única transformación lineal que verifica:

$$\begin{cases} f(1,2,3) &= (0,0) \\ f(0,1,0) &= (1,0) \\ f(0,0,1) &= (0,1) \end{cases}$$

Veamos que cumple lo pedido.

✮ Como definimos f sobre una base de $\mathbb{R}^3$ podemos afirmar que f está bien definida ✔

✮ $f(1,2,3) = (0,0)$ entonces $(1,2,3) \in \mathrm{Nu}(f)$ ✔

✮ $\mathrm{Im}(f) = \langle(0,0), (1,0), (0,1)\rangle = \langle(1,0), (0,1)\rangle = \mathbb{R}^2 \Longrightarrow f$ es un epimorfismo ✔

b) En este ejemplo nos piden que f sea un monomorfismo, esto significa que $\mathrm{Nu}(f) = \{O\}$. Aplicamos el teorema de la dimensión:

$$3 = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 0 + \dim(\mathrm{Im}(f)) \Longrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3.$$

Además nos piden que $(1,-2,3,1) \in \mathrm{Im}(f)$ así que vamos a poner este vector en la imagen. Sobre la base del dominio no tenemos ningún condicionamiento con lo cual podemos elegir la base canónica.

Definimos f como la única transformación lineal que verifica:

$$\begin{cases} f(1,0,0) &= (1,-2,3,1) \\ f(0,1,0) &= (0,1,0,0) \\ f(0,0,1) &= (0,0,0,1) \end{cases}$$

Veamos que cumple lo pedido.

✯ Como definimos f sobre una base de $\mathbb{R}^3$ podemos afirmar que f está bien definida ✔

✯ $\mathrm{Im}(f) = \langle (1,-2,3,1),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\rangle \Longrightarrow (1,-2,3,1) \in \mathrm{Im}(f)$ ✔

✯ $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ (dado que $\{(1,-2,3,1),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ es l.i.)

$\Longrightarrow \dim(\mathrm{Nu}(f)) = 0 \Longrightarrow f$ es monomorfismo ✔

c) Para que los vectores $(1,2,0,9)$ y $(0,1,3,2)$ pertenezcan al núcleo de f, vamos a definir la t.l. en una base que los contenga, por ejemplo, $\{(1,2,0,9),(0,1,3,2),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ (es fácil ver que es un conjunto l.i). Por otro lado, para asegurarnos que $(1,2,0,9)$ y $(0,1,3,2)$ pertenezcan a la imagen vamos a mandar vectores del dominio a esto vectores.

Definimos f como la única transformación lineal que verifica:

$$\begin{cases} f(1,2,0,9) &= (0,0,0,0) \\ f(0,1,3,2) &= (0,0,0,0) \\ f(0,0,1,0) &= (1,2,0,9) \\ f(0,0,0,1) &= (0,1,3,2) \end{cases}$$

Veamos que cumple lo pedido.

✯ Como definimos f sobre una base de $\mathbb{R}^4$ podemos afirmar que f está bien definida ✔

✯ $\mathrm{Im}(f) = \langle (1,2,0,9),(0,1,3,2)\rangle$ ✔

✯ $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 \Longrightarrow \dim(\mathrm{Nu}(f)) = 4-2 = 2$. Además $(1,2,0,9),(0,1,3,2) \in \mathrm{Nu}(f)$. Entonces $\mathrm{Nu}(f) = \langle (1,2,0,9),(0,1,3,2)\rangle$ ✔

5.3. Composición de transformaciones lineales

Dadas transformaciones lineales $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $g\colon \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ entre espacios vectoriales $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ y $\mathbb{U}$, tales que el codominio de f coincide con el dominio de g (en este caso, ambos son $\mathbb{W}$), para un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ podemos calcular $f(\mathbf{v})$ y al resultado, que es un vector de $\mathbb{W}$, aplicarle la transformación lineal g y obtener un vector $g(f(\mathbf{v}))$ en $\mathbb{U}$. De este modo se define la *composición*

$$g \circ f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{U}, \quad (g \circ f)(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{v})).$$

Propiedad

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ y $\mathbb{U}$ espacios vectoriales, $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $g\colon \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ transformaciones lineales. Entonces $g \circ f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{U}$ es una transformación lineal.

Demostración:

1. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$. Entonces:
   $g \circ f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{u}+\mathbf{v})) = g(f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})) = g(f(\mathbf{u})) + g(f(\mathbf{v})) = g \circ f(\mathbf{u}) + g \circ f(\mathbf{v})$.
2. Sean $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:
   $g \circ f(\alpha\mathbf{v}) = g(f(\alpha\mathbf{v})) = g(\alpha f(\mathbf{v})) = \alpha\, g(f(\mathbf{v})) = \alpha\,(g \circ f)(\mathbf{v})$.

Ejemplo 1. Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y, x-y, y)$ y $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (2y-z, -x+3z)$. Hallar $g \circ f$ y $f \circ g$.

Solución:

- $g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned} g \circ f(x,y) &= g(f(x,y)) = g(x+y, x-y, y) = (2(x-y)-y, -(x+y)+3y) \\ &= (2x-3y, -x+2y) \end{aligned}$$
- $f \circ g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$\begin{aligned} f \circ g(x,y,z) &= f(g(x,y,z)) = f(2y-z, -x+3z) \\ &= ((2y-z)+(-x+3z), (2y-z)-(-x+3z), -x+3z) \\ &= (-x+2y+2z, x+2y-4z, -x+3z) \end{aligned}$$

Respuesta:

- $g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g \circ f(x,y) = (2x-3y, -x+2y)$
- $f \circ g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \circ g(x,y,z) = (-x+2y+2z, x+2y-4z, -x+3z)$.

El núcleo y la imagen de $g \circ f$ se relacionan con los de f y g. Más precisamente:

Propiedad

Si $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $g\colon \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ son transformaciones lineales, entonces

$$\mathrm{Nu}(f) \subset \mathrm{Nu}(g \circ f) \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g).$$

Demostración:

- Si $\mathbf{v} \in \text{Nu}(f)$, entonces $g \circ f(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{v})) = g(O) = O$, con lo cual $\mathbf{v} \in \text{Nu}(g \circ f)$. Esto muestra que $\text{Nu}(f) \subset \text{Nu}(g \circ f)$.
- Si $\mathbf{u} \in \text{Im}(g \circ f)$, entonces hay un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ tal que $\mathbf{u} = g \circ f(\mathbf{v})$. Si $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$, vale $g(\mathbf{w}) = g(f(\mathbf{v})) = g \circ f(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ y concluimos que $\mathbf{u} \in \text{Im}(g)$. Luego, $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Ejemplo 2. Sean $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$f(1,-1,1) = (0,0,0), f(-1,1,0) = (2,1,1) \text{ y } f(1,0,0) = (1,1,-2)$$

y $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (x-y+z, -x+y-z)$.
Hallar $\text{Im}(g \circ f)$ y $\text{Nu}(g \circ f)$ y compararlos con $\text{Im}(g)$ y $\text{Nu}(f)$ respectivamente.

Solución: La transformación lineal f está definida en la base $\{(1,-1,1),(-1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ (es fácil verificar que este conjunto es linealmente independiente)

$$\begin{cases} f(1,-1,1) &=& (0,0,0) \\ f(-1,1,0) &=& (2,1,1) \\ f(1,0,0) &=& (1,1,-2) \end{cases}$$

Podemos definir $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ en la misma base:

$$\begin{cases} g \circ f(1,-1,1) &=& g(f(1,-1,1)) &=& g(0,0,0) &=& (0,0) \\ g \circ f(-1,1,0) &=& g(f(-1,1,0)) &=& g(2,1,1) &=& (2,-2) \\ g \circ f(1,0,0) &=& g(f(1,0,0)) &=& g(1,1,-2) &=& (-2,2) \end{cases}$$

Entonces, $\text{Im}(g \circ f) = \langle (0,0),(2,-2),(-2,2) \rangle$, es decir, $\boxed{\text{Im}(g \circ f) = \langle (2,-2) \rangle}$.
Por el teorema de la dimensión, $\dim(\text{Nu}(g \circ f)) = 3 - \dim(\text{Im}(g \circ f)) = 3 - 1 = 2$.
Observamos que $(1,-1,1) \in \text{Nu}(g \circ f)$. Además, como $g \circ f(-1,1,0) = (2,-2)$ y $g \circ f(1,0,0) = (-2,2)$,

$$g \circ f((-1,1,0)+(1,0,0)) = (2,-2)+(-2,2)$$
$$g \circ f(0,1,0) = (0,0)$$

es decir, $(0,1,0) \in \text{Nu}(g \circ f)$. Entonces $\langle (1,-1,1),(0,1,0) \rangle \subset \text{Nu}(f)$ y, como $\dim(\text{Nu}(g \circ f)) = 2$, concluimos que $\boxed{\text{Nu}(g \circ f) = \langle (1,-1,1),(0,1,0) \rangle}$.
Para terminar, comparemos la imagen y el núcleo hallados con $\text{Im}(g)$ y $\text{Nu}(f)$ respectivamente.

- $\text{Im}(g) = \langle g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1) \rangle = \langle (1,-1),(-1,1),(1,-1) \rangle = \langle (1,-1) \rangle$.
  Como $\langle (2,-2) \rangle = \langle (1,-1) \rangle$, resulta que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.
- De la definición de f, vemos que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ y que $(1,-1,1) \in \text{Nu}(f)$. Por el teorema de la dimensión, $\dim(\text{Nu}(f)) = 1$, así que $\text{Nu}(f) = \langle (1,-1,1) \rangle$. Entonces
  $\text{Nu}(f) = \langle (1,-1,1) \rangle \subsetneq \langle (1,-1,1),(0,1,0) \rangle = \text{Nu}(g \circ f)$, es decir, vale la inclusión, pero no son iguales.

Ejemplo 3. Sean $\mathbb{S} = \langle(1,0,1,2),(1,0,0,1)\rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / \, x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$. Definir, si es posible, una transformación lineal $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = \mathbb{S}$ y $\mathrm{Nu}(f \circ f) = \mathbb{T}$.

Solución: Como $\mathrm{Nu}(f) \subset \mathrm{Nu}(f \circ f)$, para que sea posible definir una transformación lineal con las condiciones pedidas, es necesario que $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$. Para ver esto, basta verificar que los generadores de $\mathbb{S}$ pertenecen a $\mathbb{T}$:

- $(1,0,1,2) \in \mathbb{T}$: $1+0+1-2=0$
- $(1,0,0,1) \in \mathbb{T}$: $1+0+0-1=0$

Vamos a definir f en una base conveniente de $\mathbb{R}^4$. Teniendo en cuenta las condiciones que debe cumplir, consideraremos una base B de $\mathbb{R}^4$ que contenga a una base de $\mathbb{S}$ y una base de $\mathbb{T}$. Como $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$, $\dim(\mathbb{S}) = 2$ y $\dim(\mathbb{T}) = 3$, para construir la base B, extendemos una base de $\mathbb{S}$ a una base de $\mathbb{T}$ y luego ésta a una base de $\mathbb{R}^4$. Por ejemplo, tomando $(0,1,0,1) \in \mathbb{T}$ y $(0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$, obtenemos

$$B = \Big\{ \overbrace{\underbrace{(1,0,1,2),(1,0,0,1)}_{B_{\mathbb{S}}},(0,1,0,1)}^{B_{\mathbb{T}}},(0,0,0,1) \Big\}.$$

Queda como ejercicio verificar que este conjunto es linealmente independiente y, por lo tanto, es una base de $\mathbb{R}^4$.
Para garantizar que $\mathrm{Nu}(f) = \mathbb{S}$, basta definir f en la forma

$$\begin{cases} f(1,0,1,2) &= (0,0,0,0) \\ f(1,0,0,1) &= (0,0,0,0) \\ f(0,1,0,1) &= \mathbf{v} \\ f(0,0,0,1) &= \mathbf{w} \end{cases}$$

con $\{\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ linealmente independiente, de modo que $\mathrm{Im}(f) = \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$ tenga dimensión 2. Esto nos asegura que $\dim(\mathrm{Nu}(f)) = 2$ y, por lo tanto, $\mathrm{Nu}(f) = \langle(1,0,1,2),(1,0,0,1) = \mathbb{S}$.
Si definimos f de este modo, $f \circ f$ nos queda:

$$\begin{cases} f\circ f(1,0,1,2) &= f(0,0,0,0) &= (0,0,0,0) \\ f\circ f(1,0,0,1) &= f(0,0,0,0) &= (0,0,0,0) \\ f\circ f(0,1,0,1) &= f(\mathbf{v}) & \\ f\circ f(0,0,0,1) &= f(\mathbf{w}) & \end{cases}$$

Entonces, para que $\mathrm{Nu}(f \circ f) = \mathbb{T}$, necesitamos que $f(\mathbf{v}) = (0,0,0,0)$, es decir, $\mathbf{v} \in \mathrm{Nu}(f) = \mathbb{S}$ y, además, que $f(\mathbf{w}) \neq (0,0,0,0)$, o sea, $\mathbf{w} \notin \mathrm{Nu}(f) = \mathbb{S}$ (de lo contrario $f \circ f = 0$).
Elegimos $\mathbf{v} = (1,0,1,2) \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{w} = (0,1,0,0) \notin \mathbb{S}$ y definimos f como la única transformación lineal que verifica:

$$\begin{cases} f(1,0,1,2) &= (0,0,0,0) \\ f(1,0,0,1) &= (0,0,0,0) \\ f(0,1,0,1) &= (1,0,1,2) \\ f(0,0,0,1) &= (0,1,0,0) \end{cases}$$

Verificación:

- $\mathbb{S} = \langle(1,0,1,2),(1,0,0,1)\rangle \subset \mathrm{Nu}(f)$ y $\dim(\mathrm{Nu}(f)) = 4-2 = 2 = \dim(\mathbb{S})$, ya que $\mathrm{Im}(f) = \langle(1,0,1,2),(0,1,0,0)\rangle$ tiene dimensión 2. Entonces $\mathrm{Nu}(f) = \mathbb{S}$.
- $\mathbb{T} = \langle(1,0,1,2),(1,0,0,1),(0,1,0,1)\rangle \subset \mathrm{Nu}(f\circ f)$ y
  $\dim(\mathrm{Nu}(f\circ f)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(f\circ f)) = 4-1 = 3 = \dim(\mathbb{T})$.
  Entonces $\mathrm{Nu}(f\circ f) = \mathbb{T}$.

Inversa de una transformación lineal

Si $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es un isomorfismo, la *función inversa* $f^{-1}\colon \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ que cumple las condiciones $f\circ f^{-1} = id_{\mathbb{W}}$ y $f^{-1}\circ f = id_{\mathbb{V}}$ también es un isomorfismo.

Ejemplo 4. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$f(x,y,z) = (x-y+z, y-z, 3x+y+z).$$

Verificar que f es un isomorfismo y encontrar f^{-1}.

Solución: Para probar que f es un isomorfismo podemos ver que manda una base de $\mathbb{R}^3$ en otra base de $\mathbb{R}^3$. Para esto tomamos, por ejemplo, la base canónica y calculamos la imagen de cada vector, $f(1,0,0) = (1,0,3)$, $f(0,1,0) = (-1,1,1)$ y $f(0,0,1) = (1,-1,1)$.
Resolvemos el sistema homogéneo para verificar que los vectores forman un conjunto l.i.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $\{(1,0,3),(-1,1,1),(1,-1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y, entonces, f es un isomorfismo. Ahora que probamos que es un isomorfismo, veamos qué aspecto tiene la función inversa. Esta cumple que $f^{-1}\circ f = id_{\mathbb{R}^3}$ lo que significa que $f^{-1}(f(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, en particular,

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(1,0,0)) = (1,0,0) &\Longrightarrow f^{-1}(1,0,3) = (1,0,0) \\ f^{-1}(f(0,1,0)) = (0,1,0) &\Longrightarrow f^{-1}(-1,1,1) = (0,1,0) \\ f^{-1}(f(0,0,1)) = (0,0,1) &\Longrightarrow f^{-1}(1,-1,1) = (0,0,1) \end{aligned}$$

Si observamos las implicaciones, notamos que tenemos definida a f^{-1} en una base de $\mathbb{R}^3$, o sea, f^{-1} es la única t.l. que verifica:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} f^{-1}(\ \ 1,0,3) & = & (1,0,0) \\ f^{-1}(-1,1,1) & = & (0,1,0) \\ f^{-1}(1,-1,1) & = & (0,0,1) \end{array}\right.}$$

Proyectores

Proyector

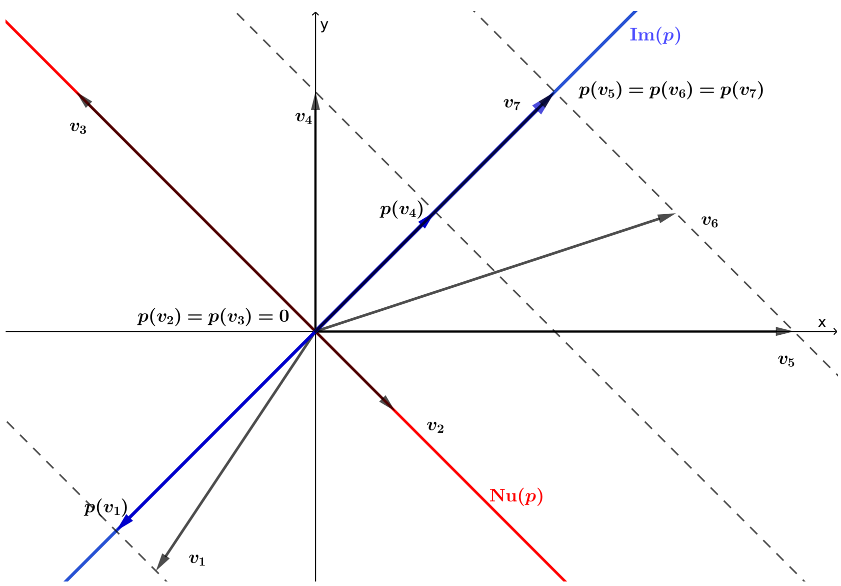
Una transformación lineal $p\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es un *proyector* si cumple $p \circ p = p$.

Ejemplo 5. Verificar que la t.l. $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $p(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$ es un proyector.

Solución: Veamos que se cumple la condición $p \circ p(\mathbf{v}) = p(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$p \circ p(x,y) = p\,(p(x,y)) = p\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2}}{2}, \frac{\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2}}{2}\right) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = p(x,y)\ \checkmark$$

Con un fácil cálculo obtenemos que, para el proyector p del ejemplo, $\mathrm{Nu}(p) = \langle(-1,1)\rangle$ e $\mathrm{Im}(p) = \langle(1,1)\rangle$.
Si observamos con atención el gráfico podemos ver que, por efecto de la transformación lineal p, los vectores se proyectan sobre la imagen de p en forma paralela al núcleo de p. Por este motivo estas t.l. son llamadas proyectores



Tenemos que $\mathrm{Im}(p) = \langle(1,1)\rangle$, es decir, $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(p) \iff \mathbf{v} = \lambda(1,1) = (\lambda,\lambda)$. Si aplicamos p a estos vectores obtenemos:

$$p(\mathbf{v}) = p(\lambda,\lambda) = \left(\frac{\lambda+\lambda}{2}, \frac{\lambda+\lambda}{2}\right) = (\lambda,\lambda) = \mathbf{v}$$

O sea, si $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(p)$ entonces $p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Esto no es casualidad, es una propiedad que cumplen todos los proyectores como veremos a continuación.

Propiedades de un proyector

Si $p \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es un proyector, entonces:

1. Para todo $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(p)$, $p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.
2. $\mathbb{V} = \mathrm{Nu}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

Demostración:

1. Sea $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(p)$, entonces $\mathbf{v} = p(\mathbf{w})$ para algún vector $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$. Aplicando p a ambos miembros obtenemos que $p(\mathbf{v}) = p(p(\mathbf{w}))$ y como p es proyector $p(p(\mathbf{w})) = p \circ p(\mathbf{w}) = p(\mathbf{w})$. Juntando todo,

$$p(\mathbf{v}) = p(p(\mathbf{w})) = p(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \Longrightarrow p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}.$$

2. Veamos primero que $\mathrm{Nu}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{O\}$:

   Sea $\mathbf{v} \in \mathrm{Nu}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Entonces $\mathbf{v} \in \mathrm{Nu}(p)$ y $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(p)$, con lo cual $p(\mathbf{v}) = O$ y, por la propiedad 1, $p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Luego, $\mathbf{v} = O$.

   Como $\mathrm{Nu}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{O\}$, podemos escribir $\mathrm{Nu}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

   Dado que $\mathrm{Nu}(p) \subset \mathbb{V}$ y $\mathrm{Im}(p) \subset \mathbb{V}$, entonces $\mathrm{Nu}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) \subset \mathbb{V}$. Si probamos que tienen la misma dimensión habremos probado la igualdad; para esto usamos primero el teorema de la dimensión de espacios vectoriales y luego el teorema en su versión de t.l.,

$$\dim(\mathrm{Nu}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)) = \dim(\mathrm{Nu}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(\mathbb{V}).$$

   Por lo tanto, $\mathrm{Nu}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathbb{V}$.

Ejemplo 6. Definir, si es posible, un proyector $p \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

a) $\mathrm{Nu}(p) = \langle (1,1,0) \rangle$ y $\mathrm{Im}(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

b) $\mathrm{Nu}(p) = \langle (1,-2,1) \rangle$ y $\mathrm{Im}(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Solución:

a) Por la propiedad 1 de un proyector, p debe verificar que $p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(p)$. Además, sabemos que $p(\mathbf{v}) = (0,0,0)$ para todo $\mathbf{v} \in \mathrm{Nu}(p)$.

   Entonces, para que $\mathrm{Im}(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle$ y $\mathrm{Nu}(p) = \langle (1,1,0) \rangle$, vamos a definir p en una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base de cada uno de estos subespacios.

Consideramos $\{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,0)\}$, que resulta ser una base de $\mathbb{R}^3$, y definimos:

$$\boxed{\begin{cases} p(-1,1,0) &= (-1,1,0) \\ p(-1,0,1) &= (-1,0,1) \\ p(1,1,0) &= (0,0,0) \end{cases}}$$

Es fácil verificar que $\operatorname{Im}(p) = \langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$ y $\operatorname{Nu}(p) = \langle(1,1,0)\rangle$.

p es un proyector: al volver a aplicar p a partir de la definición en la base,

$$\begin{cases} p\circ p(-1,1,0) &= p(-1,1,0) \\ p\circ p(-1,0,1) &= p(-1,0,1) \\ p\circ p(1,1,0) &= p(0,0,0) = (0,0,0) = p(1,1,0) \end{cases}$$

Como $p\circ p$ y p son dos t.l. cuyos valores en una base de $\mathbb{R}^3$ coinciden, entonces son la misma, es decir $p\circ p = p$.

b) Al intentar proceder como en el caso anterior, nos encontramos con que al unir una base de $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3/\ x_1+x_2+x_3=0\}$ con una de $\langle(1,-2,1)\rangle$ resulta un conjunto linealmente dependiente, es decir, no se obtiene una base de $\mathbb{R}^3$. Esto se debe a que $\langle(1,-2,1)\rangle\cap\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3/\ x_1+x_2+x_3=0\} = \langle(1,-2,1)\rangle \neq \{(0,0,0)\}$.

Veamos que no es posible definir un proyector que cumpla las condiciones pedidas.

La propiedad 2 de un proyector nos dice que para cualquier proyector $p\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, vale $\operatorname{Nu}(p)\oplus\operatorname{Im}(p) = \mathbb{R}^3$.

Entonces, los subespacios $\langle(1,-2,1)\rangle$ y $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3/\ x_1+x_2+x_3=0\}$, que tienen intersección no trivial, no pueden ser el núcleo y la imagen de un proyector.

Respuesta: No existe un proyector p que cumpla lo pedido.

5.4. Matrices de transformaciones lineales

Transformaciones lineales de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$

Consideremos, por ejemplo, la t.l. $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1+x_2-x_3-3x_4, -3x_2-x_3+5x_4, x_1+x_2-4x_2-x_4).$$

Armemos una matriz de 3 filas y 4 cuatro columnas, colocando en cada fila los coeficientes de cada componente de la t.l:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculemos ahora $A\cdot\mathbf{x}^t$ para $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$,

$$A\cdot\mathbf{x}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+x_2-x_3-3x_4 \\ -3x_2-x_3+5x_4 \\ x_1+x_2-4x_2-x_4 \end{pmatrix}$$

Obtuvimos la expresión de $f(\mathbf{x})$ traspuesta, o sea, $(A \cdot \mathbf{x}^t)^t = f(\mathbf{x})$. Por comodidad, o por no recargar la notación, se suele escribir $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$.

De la misma manera que en este ejemplo, a cualquier transformación lineal $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se le puede asociar una matriz en $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Matriz de una transformación lineal

Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. A la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ que cumple $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ se la llama *matriz de la transformación lineal* f y se la nota $M(f)$.

Sean $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces las columnas de $M(f)$ son los vectores $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)$ (en ese orden).

En efecto:

- $f(\mathbf{e}_1) = M(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ = primera columna de $M(f)$
- $f(\mathbf{e}_2) = M(f) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ = segunda columna de $M(f)$

  $\ldots$
- $f(\mathbf{e}_n) = M(f) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ = n-ésima columna de $M(f)$

Propiedad

Las columnas de $M(f)$ forman un conjunto de generadores de $\operatorname{Im}(f)$.

Se puede probar que la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de una matriz es igual a la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las filas, es decir, el rango de la matriz.
¿Cómo se relaciona esto con las transformaciones lineales? Si usamos la propiedad anterior tenemos que las columnas de $M(f)$ generan $\operatorname{Im}(f)$ entonces la dimensión de este subespacio coincide con el rango de dicha matriz.
Para el núcleo podemos pensar lo siguiente:

$$\mathbf{v} \in \operatorname{Nu}(f) \iff f(\mathbf{v}) = O \iff M(f) \cdot \mathbf{v} = O.$$

Así que el núcleo coincide con el conjunto solución del sistema homogéneo que tiene a $M(f)$ como matriz asociada, con lo cual la dimensión del núcleo coincide con $n - \text{rg}(M(f))$ (esto se deduce también de lo anterior por el Teorema de la dimensión para transformaciones lineales). Resumiendo:

Propiedades

Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces

- $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(M(f))$
- $\dim(\text{Nu}(f)) = n - \text{rg}(M(f))$

Ejemplo 1. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Hallar bases de $\text{Nu}(f)$ e $\text{Im}(f)$.

Solución: Vamos a hallar lo pedido sin encontrar la expresión de la t.l.
Para hallar una base del núcleo resolvemos un sistema homogéneo cuya matriz es $M(f)$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observemos que $\text{rg}(M(f)) = 2$ entonces $\dim(\text{Nu}(f)) = 1$. Escribiendo las ecuaciones y despejando obtenemos que una base del núcleo es $B_{\text{Nu}(f)} = \{(4, -3, 1)\}$.
Para hallar una base de la imagen no necesitamos hacer ninguna cuenta más. Por la observación anterior sabemos que $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(M(f)) = 2$ y que este subespacio está generado por las columnas de $M(f)$.
O sea:

$$\text{Im}(f) = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (-1, 3, -4) \rangle$$

El procedimiento para extraer una base de este conjunto nos lleva a escalonar la matriz $(M(f)|O)$, es decir, a lo que acabamos de hacer cuando hallamos una base del núcleo. La última matriz es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Están marcados los lugares principales y, entonces, vemos que las dos primeras columnas corresponden a vectores linealmente independientes. Por lo tanto, una base de la imagen de f es $B_{\text{Im}(f)} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$.

Respuesta: $B_{\text{Nu}(f)} = \{(4, -3, 1)\}$ y $B_{\text{Im}(f)} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ son bases de $\text{Nu}(f)$ e $\text{Im}(f)$ respectivamente.

Transformaciones lineales de $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W}$

Ahora vamos a generalizar la idea de matriz de una t.l, pero para espacios vectoriales cualesquiera, usando bases y coordenadas. Esto nos permitirá, en particular, asociar distintas matrices a una misma t.l. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Matriz de una t.l. en dos bases dadas

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales, $\dim(\mathbb{V}) = n$ y $\dim(\mathbb{W}) = m$, y $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Dadas $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y B' bases de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente, se define la *matriz de la t.l. f en las bases B y B'*, como la matriz dada por

$$M_{BB'}(f) = \left((f(\mathbf{v}_1))_{B'}^t \ (f(\mathbf{v}_2))_{B'}^t \ \cdots (f(\mathbf{v}_n))_{B'}^t\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

En otras palabras, esta matriz se construye por columnas, la primera columna corresponde a las coordenadas en base B' del vector $f(\mathbf{v}_1)$, la segunda columna corresponde a las coordenadas en base B' del vector $f(\mathbf{v}_2)$, y así siguiendo hasta la última columna que corresponde a las coordenadas en base B' del vector $f(\mathbf{v}_n)$.

Antes de ver ejemplos, relacionemos esta definición con la de la matriz de una t.l. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vista en la sección anterior:

Observación

Si E y E' son las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente y $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces

$$M_{EE'}(f) = M(f).$$

Demostración: Sea $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Las columnas de $M_{EE'}(f)$ corresponden a $(f(\mathbf{e}_1))_{E'}$, $(f(\mathbf{e}_2))_{E'}, \ldots, (f(\mathbf{e}_n))_{E'}$ y las coordenadas en base E' coinciden con los mismos vectores. De manera tal que las columnas de $M_{EE'}(f)$ son las mismas que las de $M(f)$ y, por lo tanto, las matrices son iguales.

Ejemplo 2. Sean $E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $B = \{(1,-1,1),(0,1,1),(1,2,-3)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$, $E' = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B' = \{(1,-1),(0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, y $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la t.l. dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_2 + 4x_3).$$

Calcular $M_{EE'}(f)$, $M_{BE'}(f)$ y $M_{BB'}(f)$.

Solución: Para hallar la primera matriz usamos las observación anterior y calculamos $M(f)$.

$$\boxed{M_{EE'}(f) = M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$$

Ahora, para hallar las otras dos matrices lo primero que hacemos es aplicar f a los vectores de la base B

$$\begin{aligned} f(1,-1,1) &= (-2,1) \\ f(0,1,1) &= (-1,7) \\ f(1,2,-3) &= (9,-6) \end{aligned}$$

Para la matriz $M_{BE'}(f)$ no necesitamos hacer más cálculos: al ser la segunda base la canónica de $\mathbb{R}^2$ directamente ponemos a los vectores que encontramos como columnas de esta matriz,

$$\boxed{M_{BE'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 \\ 1 & 7 & -6 \end{pmatrix}}$$

Para hallar la tercera matriz sí tenemos que hacer más cuentas: necesitamos conocer las coordenadas en la base B' de los vectores $(-2,1)$, $(-1,7)$ y $(9,-6)$. Podemos hacer una resolución simultánea de sistemas, planteando directamente la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rr|r|r|r} 1 & 0 & -2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & 1 & 7 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r|r|r} 1 & 0 & -2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

Entonces $(-2,1)_{B'} = (-2,-1)$, $(-1,7)_{B'} = (-1,6)$ y $(9,-6)_{B'} = (9,3)$, con lo cual,

$$\boxed{M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}}$$

Ejemplo 3. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la única t.l. que verifica:

$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_1) = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \\ f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3 \\ f(\mathbf{v}_3) = 5\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3 \end{cases}$$

Hallar $M_B(f)$.

Antes de resolver el ejercicio, hagamos una aclaración sobre la notación: cuando el dominio y el codominio de una t.l. f son iguales y tenemos una sola base B para considerar, en lugar de $M_{BB}(f)$ se suele escribir $M_B(f)$.

Solución: En este caso no hay necesidad de hacer cuentas, solo hay que tener clara la definición de $M_B(f)$ y de coordenadas en una base:

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{v}_1))_B &= (3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)_B = (3,2,-1) \\ (f(\mathbf{v}_2))_B &= (\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3)_B = (1,-2,4) \\ (f(\mathbf{v}_3))_B &= (5\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3)_B = (5,0,2) \end{aligned}$$

Solo nos queda poner estos vectores como columnas de la matriz:

$$\boxed{M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Ejemplo 4. Sea $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ la t.l. definida por $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X$. Dadas las bases

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, hallar $M_{BB'}(f)$.

Solución: A partir de la definición de $M_{BB'}(f)$, calculamos las columnas de esta matriz. Para esto calculamos f en cada elemento de la base B y hallamos las coordenadas del resultado en la base B':

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2). \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{B'} = (1, -2, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2). \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{B'} = (0, 0, 1, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = (-2). \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{B'} = (-2, 4, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 0. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-2). \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{B'} = (0, 0, -2, 4) \end{aligned}$$

Ubicamos los vectores de coordenadas hallados como columnas en $M_{BB'}(f)$ y nos queda:

$$\boxed{M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.}$$

Antes trabajamos con $M(f)$ y vimos que esta matriz cumple con la condición

$$f(\mathbf{x}) = M(f) \cdot \mathbf{x} \quad \textbf{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Esto se puede generalizar de la siguiente manera:

Propiedad de la matriz de una t.l.

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales, B y B' bases de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente, y $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces

$$(f(\mathbf{v}))_{B'} = M_{BB'}(f) \cdot (\mathbf{v})_B$$

Ejemplo 5. Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ bases de e.v. $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente y sea $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una t.l. tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcular $f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3)$ y hallar bases del núcleo y de la imagen de f.

Solución: Para calcular $f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3)$ hay que tener presente la propiedad anterior,

$$(f(\mathbf{v}))_{B'} = M_{BB'}(f) \cdot (\mathbf{v})_B$$

así que lo primero que tenemos que hacer es calcular las coordenadas del vector en base B,

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3)_B = (1, -1, 2).$$

Luego multiplicamos la matriz de la t.l. por este vector de coordenadas (traspuesto)

$$(f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3))_{B'} = M_{BB'}(f) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así, $(f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3))_{B'} = (3, 1, 4, -1)$ y como $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ obtenemos

$$\boxed{f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) = 3\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + 4\mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_4.}$$

Busquemos una base del núcleo de f:

$$\mathbf{v} \in \mathrm{Nu}(f) \iff f(\mathbf{v}) = O \iff M_{BB'}(f) \cdot (\mathbf{v})_B = O$$

Así que vamos a trabajar con la matriz ampliada a cero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las incógnitas del sistema corresponden a $(\mathbf{v})_B$, si llamamos $(\mathbf{v})_B = (x_1, x_2, x_3)$ las ecuaciones del sistema que quedaron luego de la triangulación son $x_1 + x_3 = 0$ y $x_2 + x_3 = 0$. Despejamos y obtenemos $x_1 = -x_3$ y $x_2 = -x_3$. Entonces,

$$(\mathbf{v})_B = (-x_3, -x_3, x_3) = x_3(-1, -1, 1)$$

con $x_3 \in \mathbb{R}$. Usamos que $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y obtenemos $\mathbf{v} = x_3(-\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ con $x_3 \in \mathbb{R}$. En conclusión,

$$\boxed{B_{\mathrm{Nu}(f)} = \{-\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}.}$$

Nos falta buscar una base de la imagen de f. Dado que $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es base de $\mathbb{V}$, entonces $\mathrm{Im}(f) = \langle f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), f(\mathbf{v}_3)\rangle$ y las columnas de la matriz son justamente las coordenadas en base B' de estos vectores. Es decir, $(f(\mathbf{v}_1))_{B'} = (1, 0, 1, -1)$, $(f(\mathbf{v}_2))_{B'} = (0, 1, 1, 2)$ y $(f(\mathbf{v}_3))_{B'} = (1, 1, 2, 1)$.
Para estudiar la dependencia lineal de estos vectores y extraer una base, lo más conveniente es usar las coordenadas, y para esto una vez más usamos la misma matriz ampliada que utilizamos al calcular el núcleo. Observemos que $\mathrm{rg}(M_{BB'}(f)) = 2$ y que $\{(f(\mathbf{v}_1))_{B'}, (f(\mathbf{v}_2))_{B'}\} = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 2)\}$ es un conjunto l.i.; entonces $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2)\}$ es l.i. y, por lo tanto, una base de $\mathrm{Im}(f)$. Para terminar, escribimos los vectores usando la base B' y nos queda

$$\boxed{B_{\mathrm{Im}(f)} = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 + 2\mathbf{w}_4\}}$$

En el último ejemplo vimos que la dimensión de la imagen de la t.l. coincide con el rango de la matriz en las bases dadas. Esto vale siempre y es independiente de las bases elegidas.

Propiedad

Sean B y B' bases de e.v. $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente, y $f \colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una t.l. Entonces, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(M_{BB'}(f))$.

Corolario

Si $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son e.v tales que $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W}) = n$ y $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una t.l., entonces son equivalentes:

- f es un monomorfismo.
- f es un epimorfismo.
- f es un isomorfismo.
- $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n$.
- $\operatorname{rg}(M_{BB'}(f)) = n$.
- $M_{BB'}(f)$ es inversible.
- $\det(M_{BB'}(f)) \neq 0$.

Ejemplo 6. Sean B y B' bases de e.v. $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que f es un isomorfismo.

Solución: Si usamos el corolario anterior, lo más cómodo es utilizar el determinante

$$|M_{BB'}(f)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \alpha & 4 \end{vmatrix} = 3\alpha - 4 + 8 + \alpha = 4 + 4\alpha$$

Sabemos que f es un isomorfismo si y solo si $\det(M_{BB'}(f)) \neq 0$. Tenemos que

$$\det(M_{BB'}(f)) \neq 0 \iff 4 + 4\alpha \neq 0 \iff \alpha \neq -1.$$

Respuesta: f es isomorfismo si y sólo si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

Matriz de la composición de transformaciones lineales

En lo que sigue veremos cómo se relacionan las matrices de dos t.l. $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $g\colon \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ con la matriz de la composición $g \circ f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{U}$.

Comencemos analizando un caso especial.
Sean $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ las transformaciones lineales tales que $f(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{v}$ para $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $g(\mathbf{w}) = A' \cdot \mathbf{w}$ para $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$, entonces $g \circ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ está dada por

$$g \circ f(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{v})) = g(A \cdot \mathbf{v}) = A' \cdot (A \cdot \mathbf{v}) = A'A \cdot \mathbf{v}$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Vemos entonces que la matriz de $\mathbb{R}^{k\times n}$ que le corresponde a $g \circ f$ es el producto $A'A$ de la matriz $A' \in \mathbb{R}^{k\times m}$ de g por la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de f.

Esto se generaliza a otros espacios vectoriales y a matrices en distintas bases como se indica a continuación.

Matriz de la composición de dos t.l.

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ y $\mathbb{U}$ espacios vectoriales, B, B' y B'' bases de $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ y $\mathbb{U}$ respectivamente. Si $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $g\colon \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ son transformaciones lineales, entonces

$$M_{BB''}(g \circ f) = M_{B'B''}(g) \cdot M_{BB'}(f)$$

Ejemplo 7. Sean $B = \{(1,1,2),(0,1,3),(0,1,-1)\}$, $B' = \{(2,1),(-2,3)\}$ y $E = \{(1,0),(0,1)\}$, $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una t.l tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la t.l. dada por $g(x,y) = (x-y, 2x+y)$. Hallar la matriz $M_{BE}(g \circ f)$.

Solución: Lo primero que tenemos que pensar es en qué bases nos conviene calcular la matriz de g dado que necesitamos $M_{BE}(g \circ f)$

$$M_{BE}(g \circ f) = M_{??}(g) \cdot M_{BB'}(f).$$

Para poder hacer el producto la base del dominio de g debe ser B'. Además queremos que la segunda base de la matriz de la composición sea E, así que ésta debe ser la base del espacio de llegada de g.

Vamos a hallar entonces $M_{B'E}(g)$. Para esto calculamos g en los vectores de la base B', $g(2,1) = (1,5)$, $g(-2,3) = (-5,-1)$, los colocamos como columnas de la matriz y obtenemos $M_{B'E}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Ahora solo debemos hacer un producto:

$$M_{BE}(g \circ f) = M_{B'E}(g) \cdot M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -19 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Respuesta: } M_{BE}(g \circ f) = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -19 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.}$

A partir de la relación entre la matriz de dos transformaciones lineales y la de su composición, se puede deducir cómo es la matriz de la inversa de un isomorfismo:

Matriz de la inversa de un isomorfismo

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales, B y B' bases $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente. Si $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es un isomorfismo, entonces

$$M_{B'B}(f^{-1}) = (M_{BB'}(f))^{-1}.$$

Ejemplo 8. Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ bases de e.v. $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente y sea $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ la t.l. tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Hallar $M_{B'B}(f^{-1})$.

Solución: Como $\det(M_{BB'}(f)) = -6 \neq 0$, podemos asegurar que f es un isomorfismo y que existe la t.l. inversa de f.
Por la propiedad anterior, para calcular la matriz pedida debemos buscar la inversa de la matriz $M_{BB'}(f)$. Haciendo el cálculo de esta inversa se obtiene:

$$M_{B'B}(f^{-1}) = (M_{BB'}(f))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Respuesta: $M_{B'B}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$.

5.5. Matrices de cambio de base

Un espacio vectorial $\mathbb{V}$ tiene distintas bases y, dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, vimos cómo asociarle coordenadas $(\mathbf{v})_B$ con respecto a cualquier base B de $\mathbb{V}$. A continuación introducimos unas matrices que permiten hallar las coordenadas de un vector en una base de $\mathbb{V}$ a partir de sus coordenadas en otra base de $\mathbb{V}$.
Utilizaremos estas matrices para calcular, a partir de la matriz $M_{B_\mathbb{V} B_\mathbb{W}}(f)$ de una transformación lineal $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ en las bases $B_\mathbb{V}$ y $B_\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente, la matriz $M_{B'_\mathbb{V} B'_\mathbb{W}}(f)$ en otras bases $B'_\mathbb{V}$ y $B'_\mathbb{W}$ de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$.

Matriz de cambio de base

Sean B y B' bases de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. La matriz de la t.l. identidad en las bases B y B' se llama *matriz de cambio de base B a base B'*,

$$C_{BB'} = M_{BB'}(id)$$

¿Cómo se calcula esta matriz?
Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$,

$$C_{BB'} = M_{BB'}(id) = \left((id(\mathbf{v}_1))^t_{B'} \;\; (id(\mathbf{v}_2))^t_{B'} \;\; \cdots \;\; (id(\mathbf{v}_n))^t_{B'} \right) = \left((\mathbf{v}_1)^t_{B'} \;\; (\mathbf{v}_2)^t_{B'} \;\; \cdots \;\; (\mathbf{v}_n)^t_{B'} \right)$$

La matriz $C_{BB'}$ tiene como columnas a las coordenadas en la base B' de los vectores de la base B.

Antes de hacer ejemplos, veamos una propiedad que resulta muy útil:

Propiedad

$$C_{B'B} = (C_{BB'})^{-1}$$

Demostración. Esta igualdad se deduce de la relación entre la matriz de un isomorfismo y la de su inversa:

$$C_{B'B} = M_{B'B}(id) = M_{B'B}(id^{-1}) = (M_{BB'}(id))^{-1} = (C_{BB'})^{-1}$$

Ejemplo 1. Dadas $B = \{(1,-1,1);(0,1,1);(1,0,1)\}$ y $E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$, calcular C_{EB} y C_{BE}.

Solución: Por la propiedad anterior las matrices C_{EB} y C_{BE} son una la inversa de la otra. Así que calculamos una y luego la invertimos. La pregunta es ¿cuál conviene calcular primero? La respuesta es C_{BE}, dado que para todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vale $(\mathbf{v})_E = \mathbf{v}$, así que esta matriz es muy fácil de armar. ¡Sólo tenemos que poner los vectores de la base B como columnas de la matriz!

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si invertimos C_{BE} obtenemos C_{EB},

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Respuesta: $C_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C_{EB} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Propiedad de la matriz de cambio de base

Si B y B' son dos bases de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ vale:

$$C_{BB'} \cdot (\mathbf{v})_B = (\mathbf{v})_{B'}$$

O sea, si multiplicamos a las coordenadas de un vector en la base B por la matriz $C_{BB'}$ obtenemos las coordenadas en base B' del mismo vector. Es por esto que la matriz recibe el nombre de *matriz de cambio de base B a base B'*.

Demostración: Vimos que $M_{BB'}(f) \cdot (\mathbf{v})_B = (f(\mathbf{v}))_{B'}$. En el caso de la t.l. identidad queda

$$C_{BB'} \cdot (\mathbf{v})_B = M_{BB'}(id) \cdot (\mathbf{v})_B = (id(\mathbf{v}))_{B'} = (\mathbf{v})_{B'}.$$

Ejemplo 2. Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, -2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3\}$ bases de un e.v. $\mathbb{V}$. Calcular $C_{BB'}$, $C_{B'B}$ y $(\mathbf{v})_{B'}$ para $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3$.

Solución: Otra vez tenemos que calcular dos matrices, $C_{BB'}$, $C_{B'B}$, que son una la inversa de la otra. En este caso es fácil calcular $C_{B'B}$ ya que las columnas de esta matriz son

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)_B = (1,1,0),\ (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)_B = (0,1,-1) \text{ y } (-2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3)_B = (-2,0,-1).$$

Entonces,

$$C_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de esta matriz y obtenemos

$$C_{BB'} = (C_{B'B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si usamos la definición de coordenadas, inmediatamente obtenemos que $(\mathbf{v})_B = (1,1,-3)$. Para calcular las coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base B' vamos a usar la propiedad anterior, es decir, multiplicar por $C_{BB'}$ sus coordenadas en la base B:

$$(\mathbf{v})_{B'} = C_{BB'} \cdot (\mathbf{v})_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

Respuesta: $C_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $(\mathbf{v})_{B'} = (-5,6,-3)$.

Propiedad (cambios de base en la matriz de una t.l.)

Sean $B_{\mathbb{V}}$ y $B'_{\mathbb{V}}$ bases de un e.v. $\mathbb{V}$ y $B_{\mathbb{W}}$ y $B'_{\mathbb{W}}$ bases de un e.v. $\mathbb{W}$. Si $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal entonces:

$$M_{B'_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{W}}}(f) = C_{B_{\mathbb{W}}B'_{\mathbb{W}}} \cdot M_{B_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(f) \cdot C_{B'_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{V}}}.$$

Demostración: Si pensamos a $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ como la composición $id_{\mathbb{W}} \circ f \circ id_{\mathbb{V}}$ y usamos que la matriz de una composición de t.l. es el producto de las matrices de las t.l. en bases convenientes, obtenemos:

$$\begin{aligned} M_{B'_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{W}}}(f) &= M_{B'_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{W}}}(id_{\mathbb{W}} \circ f \circ id_{\mathbb{V}}) \\ &= M_{B_{\mathbb{W}}B'_{\mathbb{W}}}(id_{\mathbb{W}}) \cdot M_{B_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(f) \cdot M_{B'_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{V}}}(id_{\mathbb{V}}) \\ &= C_{B_{\mathbb{W}}B'_{\mathbb{W}}} \cdot M_{B_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(f) \cdot C_{B'_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{V}}}. \end{aligned}$$

Si se cambia sólo la base de $\mathbb{V}$ o sólo la base de $\mathbb{W}$, la fórmula anterior tiene una expresión más sencilla, ya que hay que multiplicar por una sola de las matrices de cambio de base:

- $M_{B'_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(f) = M_{B_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(f) \cdot C_{B'_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{V}}}$.
- $M_{B_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{W}}}(f) = C_{B_{\mathbb{W}}B'_{\mathbb{W}}} \cdot M_{B_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(f)$.

En el caso particular de una t.l. $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, si B y B' son bases $\mathbb{V}$, la fórmula de cambio de base queda:

$$M_{B'}(f) = C_{BB'} \cdot M_B(f) \cdot C_{B'B}.$$

Ejemplo 3. Sean $B = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,-1,-2)\}$, y $f,g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ las t.l. tales que $f(x,y,z) = (x-2y, y+3z, x+y-4z)$ y $M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Encontrar $M(g \circ f)$.

Solución: Para calcular $M(g \circ f)$, que es lo mismo que $M_E(g \circ f)$, nos conviene tener las matrices de ambas t.l. en bases canónicas.
La matriz de f la calculamos directamente,

$$M_E(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

y para la matriz de g vamos a usar cambios de base y la propiedad anterior,

$$M_E(g) = C_{BE} \cdot M_B(g) \cdot C_{EB}$$

Como vimos en un ejemplo anterior, C_{BE} se construye en forma directa a partir de los vectores de B y $C_{EB} = (C_{BE})^{-1}$. En este caso quedan

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C_{EB} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} M_E(g) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 12 & -5 \\ -7 & 22 & -10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por último, calculamos la matriz pedida:

$$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 12 & -5 \\ -7 & 22 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -10 \\ -8 & 13 & 56 \\ -17 & 26 & 106 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Respuesta: } M(g \circ f) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -10 \\ -8 & 13 & 56 \\ -17 & 26 & 106 \end{pmatrix}.}$$