Capítulo 7

Diagonalización

Una transformación lineal $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definida en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión n, para cada base B de $\mathbb{V}$, tiene asociada una matriz $M_B(f) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que depende de la base.
En lo que sigue nos interesará buscar bases en las que la matriz sea lo más ”simple” posible. Más precisamente, intentaremos, cuando sea posible, hallar una base B tal que $M_B(f)$ sea diagonal, es decir, de la forma

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

7.1 Autovalores y autovectores

Para darnos una idea de cómo debería ser una base B tal que la matriz $M_B(f)$ sea diagonal, pensemos el problema para una transformación lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. En este caso, buscamos una base B de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, la primera columna de $M_B(f)$ contiene las coordenadas de $f(\mathbf{v}_1)$ en la base B y la segunda, las coordenadas de $f(\mathbf{v}_2)$ en la base B, con lo cual, debe valer

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{v}_1))_B = (\lambda_1, 0) &\iff f(\mathbf{v}_1) = \lambda_1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 = \lambda_1\mathbf{v}_1 \\ (f(\mathbf{v}_2))_B = (0, \lambda_2) &\iff f(\mathbf{v}_2) = 0\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Es decir, al aplicarle la transformación lineal a cada vector de la base B debe resultar un múltiplo del mismo vector.

Autovector y autovalor de una transformación lineal

Si $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una transformación lineal, un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, es un *autovector* de f asociado al *autovalor* $\lambda \in \mathbb{R}$ si vale $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ define una transformación lineal $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(\mathbf{x}) = A\cdot\mathbf{x}$. A los autovalores y autovectores de esta transformación lineal se los llama autovalores y autovectores de A, respectivamente.

Autovector y autovalor de una matriz

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, es un *autovector* de A asociado al *autovalor* $\lambda \in \mathbb{R}$ si vale $A\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Ejemplo 1. Hallar todos los autovalores y autovectores de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal definida por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, decidir si existe una base B de $\mathbb{R}^2$ tal que $M_B(f)$ sea diagonal.

Solución. Buscamos $\mathbf{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Reescribimos:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \iff A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Tenemos un sistema homogéneo, cuya matriz es $A - \lambda I$, con un parámetro λ y buscamos que este sistema tenga una solución $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. En otras palabras, buscamos los valores de λ para que el sistema sea compatible indeterminado. Esto ocurre cuando $\det(A - \lambda I) = 0$. Escribimos la matriz del sistema y calculamos su determinante:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4$$

Igualamos a 0 y resolvemos:

$$\lambda^2 - 4 = 0 \iff \lambda = 2 \text{ ó } \lambda = -2$$

Concluimos entonces que $\boxed{\text{los autovalores de } A \text{ son } \lambda = 2 \text{ y } \lambda = -2}$.

Para cada uno de los autovalores, busquemos los autovectores asociados. Estos son los vectores $\mathbf{v} \neq 0$ que cumplen $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, es decir, las soluciones no triviales del sistema

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$$

- Para $\lambda = 2$, el sistema queda

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  y es equivalente a la ecuación $-x + 3y = 0$. Entonces, las soluciones son $\mathbf{v} = y(3,1)$, con $y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto:

  $\boxed{\text{Los autovectores asociados a } \lambda = 2 \text{ son los vectores } \mathbf{v} = y(3,1), \text{ con } y \neq 0.}$

- Para $\lambda = -2$, el sistema queda

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y es equivalente a la ecuación $x + y = 0$. Entonces, las soluciones son $\mathbf{v} = y(-1,1)$, con $y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto:

$\boxed{\text{Los autovectores asociados a } \lambda = -2 \text{ son los vectores } \mathbf{v} = y(-1,1), \text{ con } y \neq 0.}$

Para $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, como vimos al comienzo de la sección, una base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $M_B(f)$ sea diagonal estará formada por autovectores de f, es decir, autovectores de la matriz A.
Si $\mathbf{v}_1 = (3,1)$ (autovector asociado al autovalor $\lambda = 2$) y $\mathbf{v}_2 = (-1,1)$ (autovector asociado al autovalor $\lambda = -2$), tenemos que $B = \{(3,1),(-1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, ya que los dos vectores del conjunto no son uno múltiplo del otro. Además:

- $f(3,1) = 2 \cdot (3,1) = 2(3,1) + 0(-1,1) \Rightarrow (f(3,1))_B = (2,0)$
- $f(-1,1) = (-2)(-1,1) = 0(3,1) + (-2)(-1,1) \Rightarrow (f(-1,1))_B = (0,-2)$

y, por lo tanto,

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{B = \{(3,1),(-1,1)\} \text{ es una base de } \mathbb{R}^2 \text{ tal que } M_B(f) \text{ es diagonal.}}$

Ejemplo 2. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que $\lambda = 2$ sea autovalor de A.
Para el valor de k hallado, calcular todos los autovectores de A asociados al autovalor $\lambda = 2$.

Solución. Sabemos que $\lambda = 2$ es autovalor de A si tiene un autovector asociado, es decir, si existe un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$. Reescribiendo esta igualdad, esto es lo mismo que decir que el sistema homogéneo $(A - 2I)\mathbf{v} = 0$ es compatible indeterminado. Como $A - 2I$ es una matriz cuadrada, esto ocurre cuando

$$\det(A - 2I) = 0.$$

Calculamos el determinante de la matriz

$$\det(A-2I) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ k & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 - k,$$

igualamos a 0 y despejamos: $\boxed{k = 1}$.

Para $k = 1$, buscamos los autovectores de A asociados al autovalor $\lambda = 2$ resolviendo el sistema $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$$(A - 2I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones no triviales de este sistema son de la forma $\alpha(1, 4, 3)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Estos son los autovectores asociados al autovalor $\lambda = 2$.

Respuesta: El único valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual $\lambda = 2$ es autovalor de A es $k = 1$ y, para este valor, los autovectores asociados a $\lambda = 2$ son los vectores $\mathbf{v} = \alpha(1, 4, 3)$, con $\alpha \neq 0$.

Verificación: Con $k = 1$,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y, en consecuencia, lo mismo vale para todo $\mathbf{v} = \alpha(1, 4, 3)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Polinomio característico

De la misma manera que en los ejemplos anteriores, vemos que los autovalores de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son los $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que el sistema $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ tiene solución no trivial, es decir, los $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\det(A - \lambda I) = 0$.

Polinomio característico de una matriz

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se llama *polinomio característico* de A a

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

que es un polinomio en la variable λ con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Propiedad del polinomio característico

Los autovalores de A son las raíces en $\mathbb{R}$ del polinomio característico de A.

Ejemplo 3. Hallar todos los autovalores de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución. Para hallar los autovalores de A calculamos su polinomio característico:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

El polinomio $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ no tiene raíces reales. Por lo tanto, $\boxed{A \text{ no tiene autovalores}}$.

7.2 Diagonalización y subespacios asociados a autovalores

La matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ del ejemplo anterior no tiene autovalores y, en consecuencia, tampoco tiene autovectores. Esto nos dice que para la transformación lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ definida con esa matriz no existe una base B de $\mathbb{R}^2$ tal que $M_B(f)$ sea diagonal, ya que dicha base debería estar formada por autovectores de A. Vemos entonces que el problema planteado al comienzo no siempre tiene solución.

Transformación lineal diagonalizable

Una transformación lineal $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ se dice *diagonalizable* si existe una base B de $\mathbb{V}$ tal que $M_B(f)$ es diagonal.

De manera similar a lo que hicimos al comienzo para una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, se puede ver que vale lo siguiente:

Propiedad

Una transformación lineal $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es diagonalizable si y sólo si existe una base B de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de f.

En lo que sigue nos concentraremos en hallar autovalores y autovectores de matrices y transformaciones lineales.

Si λ es un autovalor de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, los autovectores asociados a λ son las soluciones no triviales del sistema homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$; entonces, junto con el vector nulo, estos autovectores forman un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Algo similar sucede para una transformación lineal $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$.

Subespacio asociado a un autovalor

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y λ es un autovalor de A, el conjunto

$$\mathbb{S}_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n /\ A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$$

es el *subespacio asociado al autovalor* λ.
Similarmente, si $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una transformación lineal y λ es un autovalor de f,

$$\mathbb{S}_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} /\ f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$$

es el *subespacio asociado al autovalor* λ.

Ejemplo 1. En cada caso, calcular todos los autovalores de la matriz A y, para cada uno de ellos, hallar el subespacio asociado. Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal tal que $M(f) = A$, decidir si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, exhibir una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_B(f)$ sea diagonal.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución.

a) Para hallar los autovalores de A, buscamos las raíces de su polinomio característico:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Calculamos:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4) \end{aligned}$$

y buscamos las raíces de $P(\lambda)$, que son $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ y $\lambda = -2$. Entonces:

$\boxed{\text{Los autovalores de } A \text{ son } \lambda = 1, \lambda = 2 \text{ y } \lambda = -2}$

Ahora, para cada uno de los autovalores hallados, calculamos el subespacio asociado $\mathbb{S}_\lambda$ resolviendo el sistema

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Para $\lambda = 1$:

$$(A - I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones son $\mathbf{v} = z(0,0,1)$, con $z \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\boxed{\text{El subespacio asociado al autovalor } \lambda = 1 \text{ es } \mathbb{S}_1 = \langle (0,0,1) \rangle.}$

Para $\lambda = 2$:

$$(A - 2I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones son $\mathbf{v} = z(3,1,1)$, con $z \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\boxed{\text{El subespacio asociado al autovalor } \lambda = 2 \text{ es } \mathbb{S}_2 = \langle (3,1,1) \rangle.}$

Para $\lambda = -2$:

$$(A - (-2)I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones son $\mathbf{v} = z(-1,1,1)$, con $z \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\boxed{\text{El subespacio asociado al autovalor } \lambda = -2 \text{ es } \mathbb{S}_{-2} = \langle(-1,1,1)\rangle.}$

La transformación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = A$, es decir $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, es diagonalizable si y sólo si existe una base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A. Como la dimensión del subespacio $\mathbb{S}_\lambda$ asociado a cada autovalor es 1, para que el conjunto B sea linealmente independiente, elegimos un autovector asociado a cada uno de los autovalores, por ejemplo:

$$\boxed{B = \{(0,0,1),(3,1,1),(-1,1,1)\}}$$

Queda como ejercicio verificar que este conjunto es linealmente independiente y, por lo tanto, es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de f. Entonces $\boxed{f \text{ es diagonalizable}}$. Para esta base B, tenemos que:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (f(0,0,1))_B = (1,0,0)$$

$$f(3,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (f(3,1,1))_B = (0,2,0)$$

$$f(-1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (f(-1,1,1))_B = (0,0,-2)$$

b) Como en el caso anterior, para hallar los autovalores de A, calculamos su polinomio característico:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4)$$

y le buscamos las raíces que, en este caso, son $\lambda = 2$ (doble) y $\lambda = -2$. Entonces:

$\boxed{\text{Los autovalores de } A \text{ son } \lambda = 2 \text{ y } \lambda = -2}$

Ahora, para cada uno de los autovalores, calculamos el subespacio asociado $\mathbb{S}_\lambda$ resolviendo el sistema

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Para $\lambda = 2$:

$$(A - 2I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones son $\mathbf{v} = y(3,1,0) + z(0,0,1)$, con $y, z \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\boxed{\text{El subespacio asociado al autovalor } \lambda = 2 \text{ es } \mathbb{S}_2 = \langle (3,1,0), (0,0,1) \rangle.}$

Para $\lambda = -2$:

$$(A - (-2)I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones son $\mathbf{v} = z(1,-1,1)$, con $z \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\boxed{\text{El subespacio asociado al autovalor } \lambda = -2 \text{ es } \mathbb{S}_{-2} = \langle (1,-1,1) \rangle.}$

Para decidir si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ es diagonalizable, buscamos una base B de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A. En este caso tenemos que $\dim(\mathbb{S}_2) = 2$ y $\dim(\mathbb{S}_{-2}) = 1$. Consideramos una base de $\mathbb{S}_2$, por ejemplo $B_{\mathbb{S}_2} = \{(3,1,0), (0,0,1)\}$, y una base de $\mathbb{S}_{-2}$, por ejemplo $B_{\mathbb{S}_{-2}} = \{(1,-1,1)\}$. Al unirlas obtenemos

$$\boxed{B = \{(3,1,0), (0,0,1), (1,-1,1)\}}$$

que resulta ser linealmente independiente. Por lo tanto, B es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de f. Concluimos que $\boxed{f \text{ es diagonalizable}}$.

Como los dos primeros vectores de la base B son autovectores asociados al autovalor 2 y el tercero es un autovector asociado al autovalor -2, tenemos que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Nuevamente, para hallar los autovalores de A, calculamos las raíces de su polinomio característico:

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4) \end{aligned}$$

Las raíces de este polinomio son $\lambda = 2$ (doble) y $\lambda = -2$. Entonces:

$\boxed{\text{Los autovalores de } A \text{ son } \lambda = 2 \text{ y } \lambda = -2.}$

Ahora, para cada uno de los autovalores, calculamos el subespacio asociado $\mathbb{S}_\lambda$ resolviendo el sistema

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Para $\lambda = 2$:

$$(A - 2I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones son $\mathbf{v} = z(0,0,1)$, con $z \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\boxed{\text{El subespacio asociado al autovalor } \lambda = 2 \text{ es } \mathbb{S}_2 = \langle (0,0,1) \rangle.}$

Para $\lambda = -2$:

$$(A - (-2)I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones son $\mathbf{v} = z(2,-2,1)$, con $z \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\boxed{\text{El subespacio asociado al autovalor } \lambda = -2 \text{ es } \mathbb{S}_{-2} = \langle (2,-2,1) \rangle.}$

Veamos que en este caso no existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A. Vimos que A tiene dos autovalores, $\lambda = 2$ y $\lambda = -2$. Si tomamos tres autovectores de A para intentar formar una base de $\mathbb{R}^3$, necesariamente dos de ellos pertenecerán a $\mathbb{S}_2$ o dos de ellos a $\mathbb{S}_{-2}$. Pero cada uno de estos subespacios tiene dimensión 1, con lo cual no puede contener dos vectores linealmente independientes. Concluimos que $\boxed{f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \text{ no es diagonalizable}}$.

Observaciones:

El polinomio característico de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene grado n y, como consecuencia, tiene n raíces en $\mathbb{C}$ (contadas con multiplicidad). Los autovalores de A son las raíces *reales* de este polinomio. Entonces:

> Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ puede tener como máximo n autovalores.

En el ejemplo anterior, por ejemplo, la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ del inciso a) tiene 3 autovalores; sin embargo, en los incisos b) y c), tenemos matrices en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ que tienen sólo dos autovalores.
En el caso a), al considerar un autovector asociado a cada uno de los 3 autovalores (es decir, una base del subespacio asociado a cada autovalor, ya que cada uno tiene dimensión 1) obtuvimos un conjunto linealmente independiente, es decir, una base de $\mathbb{R}^3$. De la misma manera, en el inciso b), al unir bases de los subespacios asociados a cada autovalor (un subespacio de dimensión 2 y otro de dimensión 1), conseguimos un conjunto de 3 vectores linealmente

independiente, o sea una base de $\mathbb{R}^3$. En el caso c), no fue posible obtener una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A, ya que la matriz tiene dos autovalores y para cada uno de ellos el subespacio asociado es de dimensión 1. Si bien al unir bases de estos subespacios resulta un conjunto linealmente independiente, éste tiene sólo 2 vectores y, entonces, no es una base de $\mathbb{R}^3$.

Las observaciones anteriores valen en general: si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son autovalores de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B_1, \dots, B_r$ son bases de los subespacios asociados $\mathbb{S}_{\lambda_1}, \dots, \mathbb{S}_{\lambda_r}$ respectivamente, el conjunto $B_1 \cup \dots \cup B_r$ es linealmente independiente. En particular, si $\dim(\mathbb{S}_{\lambda_1}) + \dots + \dim(\mathbb{S}_{\lambda_r}) = n$, entonces $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ es una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A.
De esta propiedade se deduce que:

> Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene n autovalores distintos, entonces $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ es diagonalizable.

Esto se debe a que, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los n autovalores distintos de A y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ son autovectores asociados a cada uno de ellos, entonces $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ tal que $M_B(f)$ es diagonal.

Más generalmente, vale el siguiente criterio:

> Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la transformación lineal tal que $M(f) = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son todos sus autovalores, entonces
>
> $$f \text{ es diagonalizable si y sólo si } \dim(\mathbb{S}_{\lambda_1}) + \dots + \dim(\mathbb{S}_{\lambda_r}) = n.$$

Matrices diagonalizables

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, si la transformación lineal $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ es diagonalizable, existe una base B de $\mathbb{R}^n$, formada por autovectores de A, tal que $M_B(f)$ es diagonal. Vía matrices de cambio de base, tenemos la siguiente relación:

$$A = M(f) = C_{BE}\, M_B(f)\, C_{EB} = C\, D\, C^{-1}$$

donde $C = C_{BE}$ es una matriz inversible y $D = M_B(f)$ es una matriz diagonal.

Por ejemplo, en el Ejemplo 1 de la sección anterior, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ hallamos $B = \{(3,1), (-1,1)\}$, base de $\mathbb{R}^2$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Entonces, si

$$C = C_{BE} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = C\, D\, C^{-1}$$

Matriz diagonalizable

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *diagonalizable* si existen una matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y una matriz inversible $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $A = C\,D\,C^{-1}$.

Como en el ejemplo anterior, una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable cuando es diagonalizable la transformación lineal $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Entonces:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable si y sólo si existe una base $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de A.
En tal caso, si $\mathbf{v}_1$ es un autovector asociado al autovalor λ_1, $\mathbf{v}_2$ un autovector asociado a λ_2, …, $\mathbf{v}_n$ un autovector asociado a λ_n (con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ no necesariamente distintos),

$$C = \begin{pmatrix} (\mathbf{v}_1)^t & (\mathbf{v}_2)^t & \cdots & (\mathbf{v}_n)^t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

cumplen que

$$A = C\,D\,C^{-1}.$$

Ejemplo 2. Para cada una de las matrices del Ejemplo 1, decidir si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, hallar una matriz inversible C y una matriz diagonal D tales que $A = C\,D\,C^{-1}$.

Solución. Utilizaremos los resultados de los cálculos que hicimos en el Ejemplo 1.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Vimos que $B = \{(0,0,1), (3,1,1), (-1,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A y, por lo tanto, $\boxed{A \text{ es diagonalizable}}$. Además:

- $(0,0,1)$ es un autovector de A asociado al autovalor 1,
- $(3,1,1)$ es un autovector de A asociado al autovalor 2,
- $(-1,1,1)$ es un autovector de A asociado al autovalor -2.

Entonces $A = C\,D\,C^{-1}$ para las matrices

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Verificación: calculamos C^{-1} y efectuamos los productos

$$C\,D\,C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Vimos que $B = \{(3,1,0),(0,0,1),(1,-1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A y, por lo tanto, $\boxed{A \text{ es diagonalizable}}$. Además:

- $(3,1,0)$ y $(0,0,1)$ son autovectores de A asociados al autovalor 2,
- $(1,-1,1)$ es un autovector de A asociado al autovalor -2.

Entonces $A = C\,D\,C^{-1}$ para las matrices

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Verificación: calculamos C^{-1} y efectuamos los productos

$$C\,D\,C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Para esta matriz vimos que no existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A y, por lo tanto, $\boxed{A \text{ no es diagonalizable}}$.

Ejemplo 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & k & -3 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que $\mathbf{v} = (0,1,-1)$ sea un autovector de A. Para el valor hallado, decidir si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, hallar una matriz inversible C y una matriz diagonal D tales que $A = C\,D\,C^{-1}$.

Solución. El vector $\mathbf{v}$ es un autovector de A si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, o sea,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & k & -3 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ k+3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \iff \begin{cases} k+3 = \lambda \\ 2 = -\lambda \end{cases}$$

Deducimos que $\lambda = -2$ y $k = -5$. Entonces, para $\boxed{k = -5}$, el vector $\mathbf{v} = (0,1,-1)$ es un autovector de A asociado al autovalor -2.

Veamos si, para el valor de k hallado, la matriz es diagonalizable. Al reemplazar $k = -5$, queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -3 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Buscamos los autovalores de A, que son las raíces de su polinomio característico:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -5-\lambda & -3 \\ -6 & 6 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(-2-\lambda)$$

Las raíces de $P(\lambda)$ son $\lambda = 1$ (doble) y $\lambda = -2$. Así, los autovalores de A son $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$. Para decidir si A es diagonalizable, buscamos los autovectores asociados a cada autovalor, es decir las soluciones no triviales de $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$, y vemos si es posible construir una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A.

Para $\lambda = 1$:

$$(A - I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones son los vectores $\mathbf{v} = (x, y, 2x - 2y) = x(1,0,2) + y(0,1,-2)$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces, el subespacio asociado al autovalor $\lambda = 1$ es $\mathbb{S}_1 = \langle (1,0,2), (0,1,-2) \rangle$.

Para $\lambda = -2$, ya conocemos el autovector $\mathbf{v} = (0,1,-1)$, por lo que vimos al comienzo del ejemplo. También podemos resolver el sistema $(A - (-2)I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y obtener que el subespacio asociado a este autovalor es $\mathbb{S}_{-2} = \langle (0,1,-1) \rangle$.

A partir de estos cálculos, tenemos que $B = \{(1,0,2), (0,1,-2), (0,1,-1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A. En consecuencia, $\boxed{A \text{ es diagonalizable.}}$

Como los dos primeros vectores de la base B son autovectores asociados al autovalor 1 y el tercero es un autovector asociado al autovalor -2, entonces $A = C\,D\,C^{-1}$ para las matrices

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Verificación: calculamos C^{-1} y efectuamos los productos

$$C\,D\,C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -3 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Respuesta: el valor de k para el cual $\mathbf{v} = (0,1,-1)$ es un autovector de A es $k = -5$ y, para este valor, A es diagonalizable: $A = C\,D\,C^{-1}$ con $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Más ejemplos de diagonalización

Hasta el momento vimos ejemplos donde analizamos si es diagonalizable una transformación lineal $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es decir, dada por su matriz $A = M(f)$ en la base canónica.
Consideremos ahora ejemplos en los que aparecen otras bases.

Ejemplo 4. En cada caso, decidir si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, hallar una base B' de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{B'}(f)$ sea diagonal.

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{EB}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

con $B = \{(1,0,0),(2,1,0),(0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

con $B = \{(1,0,-1),(1,-1,0),(0,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

Solución. En ambos casos, vamos a calcular la matriz de f en la base canónica efectuando un cambio de base conveniente y luego analizaremos si f es diagonalizable como hicimos en ejemplos anteriores.

a) Aplicando la fórmula de cambio de base para la matriz de una transformación lineal tenemos que

$$A = M_{EE}(f) = C_{BE}M_{EB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -12 \\ 3 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(Recordar que la matriz de cambio de base C_{BE} tiene como columnas a los vectores de B.)

La matriz A hallada cumple que $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Calculamos los autovalores de f buscando las raíces del polinomio característico de A:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -6 & -12 \\ 3 & -5-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2)$$

Entonces los autovalores de f son 2, 1 y -2.

Como f está definida en $\mathbb{R}^3$ y tiene 3 autovalores *distintos*, entonces $\boxed{f \text{ es diagonalizable}}$.

Una base B' de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{B'}(f)$ es diagonal debe estar formada por autovectores de f. Para hallarlos, resolvemos los sistemas homogéneos $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para cada uno de los autovalores λ encontrados. Queda como ejercicio hacer estos cálculos. Se obtiene $\mathbb{S}_2 = \langle(-12,-6,1)\rangle$, $\mathbb{S}_1 = \langle(2,1,0)\rangle$ y $\mathbb{S}_{-2} = \langle(1,1,0)\rangle$.

Armamos la base B' considerando un autovector asociado a cada autovalor:

$$\boxed{B' = \{(-12,-6,1),(2,1,0),(1,1,0)\}} \quad \text{y} \quad M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Respuesta: f es diagonalizable y $B' = \{(-12,-6,1),(2,1,0),(1,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{B'}(f)$ es diagonal.

b) Nuevamente comenzamos aplicando la fórmula de cambio de base para calcular la matriz de f en la base canónica:

$$A = M_{EE}(f) = M_{BE}(f)C_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(Recordar que la matriz de cambio de base C_{EB} se puede hallar, o bien directamente a partir de la definición, o bien como la inversa de C_{BE}, que es fácil de construir.)

Calculamos los autovalores de f buscando las raíces del polinomio característico de A:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-2-\lambda)^2$$

Las raíces de este polinomio son $\lambda = 0$ y $\lambda = -2$ (doble). Entonces f tiene dos autovalores, 0 y -2. Sólo con esta información no podemos determinar si es diagonalizable. Debemos buscar autovectores.

Para $\lambda = 0$, los autovectores son las soluciones no triviales de $(A - 0I)\mathbf{v} = 0$, es decir, de $A\mathbf{v} = 0$. El conjunto de soluciones de este sistema es $\mathbb{S}_0 = \langle (1,0,0) \rangle$.

Para $\lambda = -2$:

$$(A - (-2)I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que tiene como cojunto solución a $\mathbb{S}_{-2} = \langle (1,-2,0) \rangle$.

Como $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\dim(\mathbb{S}_0) + \dim(\mathbb{S}_{-2}) = 2 < 3$, no hay suficientes autovectores linealmente independientes para formar una base de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto:

Respuesta: f no es diagonalizable.

7.3 Diagonalización de transformaciones lineales $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

Para hallar autovalores y autovectores de una transformación lineal $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definida en un espacio vectorial tal que $\dim(\mathbb{V}) = n$, vamos a usar que mediante bases y coordenadas podemos asociarle a f matrices en $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Dada $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, buscamos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, tales que $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
Si $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$, el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ es de la forma $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Entonces la condición $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ se escribe como

$$f(\mathbf{v}) = \lambda(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = \lambda a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda a_n\mathbf{v}_n.$$

Si miramos coordenadas en la base B, lo anterior nos dice que si $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ es un autovector de f asociado al autovalor λ y sus coordenadas en la base B son $(\mathbf{v})_B = (a_1, \cdots, a_n)$, entonces

$$(f(\mathbf{v}))_B = (\lambda a_1, \cdots, \lambda a_n) = \lambda(a_1, \cdots, a_n) = \lambda \cdot (\mathbf{v})_B.$$

Recordemos que $(f(\mathbf{v}))_B$ se puede calcular a partir de $(\mathbf{v})_B$ usando la matriz de f en la base B:

$$(f(\mathbf{v}))_B = M_B(f) \cdot (\mathbf{v})_B$$

Juntando estas dos últimas igualdades, deducimos que

$$M_B(f) \cdot (\mathbf{v})_B = \lambda \cdot (\mathbf{v})_B$$

es decir, que λ es un autovalor de la matriz $M_B(f) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y el vector $(\mathbf{v})_B$ de las coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base B es un autovector asociado a λ.
Recíprocamente, si $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ es un autovector de $M_B(f)$ asociado al autovalor λ, entonces $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n \in \mathbb{V}$ (el vector cuyas coordenadas en la base B son $(a_1, \ldots, a_n)$) es un autovector de f asociado al mismo autovalor.

Si $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una transformación lineal en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión n y B es una base de $\mathbb{V}$, entonces:

- λ es autovalor de $f \iff \lambda$ es autovalor de $M_B(f) \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ es autovector de f asociado al autovalor $\lambda \iff (\mathbf{v})_B \in \mathbb{R}^n$ es autovector de $M_B(f)$ asociado al autovalor λ

Ejemplo 1. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y sea $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la transformación lineal definida por

$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_1) &= -2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{v}_2) &= 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \end{cases}$$

Hallar los autovalores y los autovectores de f. Decidir si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, dar una base B' de $\mathbb{V}$ tal que $M_{B'}(f)$ sea diagonal.

Solución. Como f está definida en la base B, podemos constuir fácilmente $M_B(f) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sabemos que los autovalores de f son los autovalores de esta matriz.

$$\begin{array}{lll} f(\mathbf{v}_1) = -2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 & \Rightarrow & (f(\mathbf{v}_1))_B = (-2, -1) \\ f(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 & \Rightarrow & (f(\mathbf{v}_2))_B = (3, 2) \end{array} \longrightarrow \quad M_B(f) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Buscamos los autovalores de $M_B(f)$. Para esto, calculamos su polinomio característico:

$$P(\lambda) = \det(M_B(f) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(2-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 1$$

Las raíces de este polinomio son $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$. Por lo tanto:
$\boxed{\text{Los autovalores de } f \text{ son } \lambda = 1 \text{ y } \lambda = -1}$.

Ahora buscamos los autovectores de $M_B(f)$ asociados a cada autovalor, que son las coordenadas (a_1, a_2) de los autovectores de f en la base B.
Para $\lambda = 1$:

$$(M_B(f) - I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Las soluciones del sistema son $(a_1, a_2) = (a_1, a_1)$ con $a_1 \in \mathbb{R}$. Los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ que tienen estas coordenadas en la base B son $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_1\mathbf{v}_2 = a_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$, con $a_1 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{El subespacio de autovectores de } f \text{ asociado al autovalor } \lambda = 1 \text{ es } \mathbb{S}_1 = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle.}$

Para $\lambda = -1$:

$$(M_B(f) - (-1)I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Las soluciones del sistema son $(a_1, a_2) = (3a_2, a_2)$, con $a_2 \in \mathbb{R}$. Los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ que tienen estas coordenadas en la base B son $\mathbf{v} = 3a_2\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = a_2(3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$, con $a_2 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{El subespacio de autovectores de } f \text{ asociado al autovalor } \lambda = -1 \text{ es } \mathbb{S}_{-1} = \langle 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle.}$

Con los autovectores hallados, armamos la base $\boxed{B' = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\}}$ de $\mathbb{V}$. Por lo tanto,

$\boxed{f \text{ es diagonalizable y } M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

Ejemplo 2. Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3\}$ bases de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y sea $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
Decidir si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, hallar una base B'' de $\mathbb{V}$ tal que $M_{B''}(f)$ sea diagonal.

Solución. Vimos que para hallar los autovalores y los autovectores de f podemos trabajar con la matriz de f en cualquier base de $\mathbb{V}$. En este caso, tenemos como dato la matriz $M_{BB'}(f)$, que está armada con *dos bases distintas*, B y B', así que no podemos usar directamente esta matriz. Comenzaremos haciendo un cambio de base para hallar $M_B(f)$:

$$M_B(f) = C_{B'B}\, M_{BB'}(f)$$

Como $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_B = (1, -1, 0)$, $(\mathbf{v}_2)_B = (0, 1, 0)$ y $(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) = (-1, 0, 1)$, nos queda:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, como en el ejemplo anterior, buscamos los autovalores de f y las coordenadas en la base B de los autovectores asociados usando la matriz $M_B(f)$. El polinomio característico es

$$P(\lambda) = \det(M_B(f) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -6 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-3)^2(\lambda+2),$$

con lo cual los autovalores de f son $\lambda = 3$ y $\lambda = -2$.
Como f tiene 2 autovalores y está definida en un espacio vectorial de dimensión 3, sólo con esta información no podemos decidir si f es diagonalizable o no. Para hacerlo, buscamos los autovectores.
Para cada autovalor, buscamos los autovectores de $M_B(f)$ asociados, que son las coordenadas en la base B de los autovectores de f.
Para $\lambda = 3$:

$$(M_B(f) - 3I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones del sistema son $(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_1 + 2a_2)$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ que tienen estas coordenadas en la base B son $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + (a_1 + 2a_2)\mathbf{v}_3 = a_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + a_2(\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3)$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
Entonces, el subespacio de autovectores de f asociado al autovalor 3 es $\mathbb{S}_3 = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \rangle$.
Para $\lambda = -2$:

$$(M_B(f) - (-2)I \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las soluciones del sistema son de la forma $(a_1, a_2, a_3) = (-\frac{3}{2}a_3, 0, a_3)$, con $a_3 \in \mathbb{R}$.
Los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ que tienen estas coordenadas en la base B son $\mathbf{v} = -\frac{3}{2}a_3\mathbf{v}_1 + a_3\mathbf{v}_3 = a_3(-\frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3)$, con $a_3 \in \mathbb{R}$.
Entonces, el subespacio de autovectores de f asociado al autovalor -2 es $\mathbb{S}_{-2} = \langle -\frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \rangle$.
Uniendo una base de $\mathbb{S}_3$ y una base de $\mathbb{S}_{-2}$ obtenemos $\boxed{B'' = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, -\frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3\},}$ que es una base de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de f. Por lo tanto,

$$\boxed{f \text{ es diagonalizable y } M_{B''}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.}$$