1 er Parcial Matemática 51 CBC - 1 C24 - Sab 18 / 5 / 24 - CU

H- Tema 4

1. Escribir como intervalo o unión de intervalos al conjunto $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{2x+7}{x+4} < 2 \right\}$.

2. Hallar la función cuadrática cuyo gráfico pasa por los puntos $(2, 0)$, $(4, 0)$ y $(3, -5)$.

3. Sean $f(x) = \dfrac{8x+5}{x}$, $g(x) = x - 5$ y $h(x) = g \circ f(x)$. Hallar las ecuaciones de todas las asíntotas de h.

4. Sea $f(x) = e^{x-2} + 5$. Hallar f^{-1} y dar su dominio.

---

1. - Transformamos la expresión, para poder comparar con 0 :

$$\frac{2x+7}{x+4} < 2 \implies \frac{2x+7}{x+4} - 2 < 0 \implies \frac{2x+7-2(x+4)}{x+4} < 0 \implies \frac{2x+7-2x-8}{x+4} < 0$$

se van las x :

$$\frac{7-8}{x+4} < 0 \implies \frac{-1}{x+4} < 0$$

No hace falta plantear dos casos,
pues el cociente será negativo, si el denominador es positivo,

es decir :

$x + 4 > 0 \implies x > -4$

Por lo tanto, $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \Big/ \dfrac{2x+7}{x+4} < 2 \right\} = (-4, +\infty)$

---

2. - f. cuadrática (de grado 2) ,
cuyo Gráfico pasa por los puntos (2, 0) , (4, 0) y (3, -5)

Como 2 y 4 son raíces de f (x) ,
planteo la forma factorizada de f : $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

$f(x) = a\,(x-2)\,(x-4)$

Dado que el punto $(3, -5)$ pertenece al Gráf (f) ,
las coordenadas del punto deben satisfacer la fórmula de f :

$-5 = a\,(3-2)\,.\,(3-4)$

$-5 = a\,(1)\,.\,(-1)$

$-5 = -a \quad \Longrightarrow \quad a = 5$

La función cuadrática pedida es $f(x) = 5(x-2)(x-4)$

Otra forma de resolverlo :

la semisuma de las raíces es la abscisa del vértice de la Parábola

$$\frac{2+4}{2} = 3 = x_v$$

Dado que el punto $(3, -5)$ **pertenece al Gráf (f), debe ser el vértice, que es único**

$V = (3, -5)$

Usamos la forma canónica de f : $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

$f(x) = a(x-3)^2 + (-5)$, **es decir,** $f(x) = a(x-3)^2 - 5$

Dado que además f pasa por el punto $(2, 0)$ **las coordenadas del punto**
deben satisfacer la fórmula de f (**lo mismo si usáramos el** $(4, 0)$) **:**

$0 = a(2-3)^2 - 5 \quad \Longrightarrow \quad a(2-3)^2 = 5 \quad \Longrightarrow \quad a(-1)^2 = 5 \quad \Longrightarrow \quad a = 5$

Por lo tanto, la función cuadrática pedida es :

$f(x) = 5(x-3)^2 - 5$

Nota : si desarrollamos $f(x) = 5(x-2)(x-4) = 40 - 30x + 5x^2$

si desarrollamos $f(x) = 5(x-3)^2 - 5 = 40 - 30x + 5x^2$

----

3. - Sean $f(x) = \dfrac{8x+5}{x}$, $g(x) = x - 5$, $h(x) = g \circ f(x)$. **Buscamos asíntotas de h (x)**

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) - 5 = \frac{8x+5}{x} - 5 = \frac{8x+5-5x}{x} = \frac{3x+5}{x} = h(x)$$

$\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{0\}$, **entonces** $x = 0$ **es candidato a ser AV de h**

Existencia de AV de h (x) :

Calculamos el límite de h (x) en x = 0. Si da ∞, x = 0 será AV

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{3x+5}^{0+5}}{\underbrace{x}_{0^+}} = +\infty$$ **entonces x = 0 es AV de h (x) por derecha**

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{3x+5}^{0+5}}{\underbrace{x}_{0^-}} = -\infty$$ **entonces x = 0 es AV de h (x) por izquierda**

Existencia de AH de h (x) :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x+5}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}\left(3+\overbrace{\frac{5}{x}}^{0}\right)}{\cancel{x}} = 3$$ **entonces y = 3 es AH de h (x) por derecha y por izquierda**

Por lo tanto, x = 0 es AV de h (x), y = 3 es AH de h (x)

----

4. - Sea f (x) = $e^{x-2}+5$. Buscamos su invesa f^{-1} y Dom $\left(f^{-1}\right)$

Para calcular f^{-1} ponemos y = f (x) para despejar x :

$y = e^{x-2}+5 \implies y-5 = e^{x-2}$ aplicamos ln a ambos miembros :

$\ln(y-5) = \ln\left(e^{x-2}\right)$

(usamos propiedad que dice que lo que hace f lo deshace f^{-1}, $f^{-1}(f(\chi)) = \chi$ con f la exponencial y f^{-1} el logaritmo natural ln, a $\chi = x-2$)

$\ln(y-5) = x-2 \implies x = \ln(y-5)+2$

intercambiamos los nombres de las variables x ⇔ y :

$y = \ln(x-5)+2 = f^{-1}(x)$

Para calcular el dominio de f^{-1},
observemos que para que el ln esté definido deberá ser :

$x - 5 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x > 5 \quad \Longrightarrow \quad \text{Dom}\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R}_{>5} = (5, +\infty)$

Por lo tanto, la función inversa de $f(x) = e^{x-2} + 5$ es :

$f^{-1}(x) = \ln(x - 5) + 2$

y el $\text{Dom}\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R}_{>5} = (5, +\infty)$
