PRÁCTICA 5

TRANSFORMACIONES LINEALES

Ejercicio 1.- Determinar si la función f es transformación lineal.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 . x_2, 0, 0)$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{3\times 2}$, $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 - x_2 \\ 0 & 0 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 2}$, $f(A) = A^t$

Ejercicio 2.- Hallar la expresión de la transformación lineal f.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(1,0,0) = (2,1,-1,1)$, $f(0,1,0) = (3,-1,1,0)$ y $f(0,0,1) = (0,0,4,1)$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,1,-1) = (0,3,1)$, $f(1,0,1) = (2,-1,1)$ y $f(1,1,0) = (3,2,4)$.

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3.- Decidir si existe una transformación lineal f que satisface:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(1,-2,0) = (3,4)$, $f(2,0,1) = (-1,1)$, $f(0,4,1) = (-7,-7)$

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(1,1,1) = (2,3,4)$, $f(0,1,1) = (1,2,1)$, $f(1,2,2) = (1,1,5)$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(1,1) = (2,1,1)$, $f(1,0) = (0,2,0)$, $f(5,2) = (4,8,2)$

Ejercicio 4.- Hallar una base y la dimensión de Nu f y de Im f.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 2x_2 + x_3)$

b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, 0, x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 & x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 & x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3)$

y sean $\mathbf{v} = (2,3)$; $\mathbb{S} = \langle (1,2,1) \rangle$; $\mathbb{T} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / 3x_1 - 2x_2 = 0 \}$.

Hallar $f(\mathbb{S})$, $f^{-1}(\mathbf{v})$ y $f^{-1}(\mathbb{T})$.

Ejercicio 6.- Calcular dim Nu f y dim Im f .

a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^5$ monomorfismo

b) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ epimorfismo

c) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ $f(\mathbf{x})=2\mathbf{x}$

Ejercicio 7.- Sea $B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ una base de $\mathbb{V}$. Sea $f:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ una t.l. tal que:

$$f(\mathbf{v}_1)=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3 \quad ; \quad f(\mathbf{v}_2)=a\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3 \quad ; \quad f(\mathbf{v}_3)=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+a\mathbf{v}_3.$$

Determinar todos los valores de a para los cuales f no es monomorfismo. Para cada uno de ellos calcular el núcleo de f.

Ejercicio 8.- Definir una transformación lineal que verifique las condiciones enunciadas.

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que Nu $f=\{\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\ /\ x_1+2x_2=0\ \}$, Im $f=\langle(1,0)\rangle$

b) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ tal que Nu $f=\{\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^4\ /\ x_1+x_2+x_4=x_2+x_3=0\ \}$

c) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ tal que $(1,1,2)\in$ Nu f, Im $f=\langle(1,0,1,1),(2,1,0,1)\rangle$

d) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ tal que $(1,0,1,3)\in$ Nu f y f es epimorfismo

e) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ tal que Nu $f=$ Im $f=\langle(2,1,-1,0),(0,1,0,1)\rangle$

f) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que f no es monomorfismo y $(1,1,1)\in$ Im f

g) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ tal que Nu $f=$ Im f y $f(3,2,1,-1)=f(-1,2,0,1)\neq 0$.

Ejercicio 9.- Sean $\mathbb{S}_1=\{\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^4\ /\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=0\ ;\ x_1-3x_3+x_4=0\ \}$;

$\mathbb{S}_2=\{\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^4\ /\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=0\ \}$; $\mathbb{T}_1=\langle(1,0,1),(0,1,1)\rangle$; $\mathbb{T}_2=\langle(2,1,3),(0,0,1)\rangle$.

Hallar una transformación lineal $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ que verifique simultáneamente:

$f(\mathbb{S}_1)\subseteq\mathbb{T}_1$; $f(\mathbb{S}_2)\subseteq\mathbb{T}_2$; dim Nu $f=1$.

Ejercicio 10.- Hallar $h=g\circ f$, $t=f\circ g$ y determinar el núcleo y la imagen de f, g, h y t.

a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_1+x_2-x_3)$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $g(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1,x_2)$.

b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$f(0,0,1)=(0,-1,1)$, $f(0,1,1)=(1,0,1)$, $f(1,1,1)=(1,1,0)$

$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $g(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_3,x_2-x_3,2x_1+x_2)$

Ejercicio 11.- Hallar la función inversa del isomorfismo f.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(1, 1, -1) = (1, -1, 1)$, $f(2, 0, 1) = (1, 1, 0)$, $f(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2) = (x_1 , x_1 - x_2)$

c) $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 2}$ $f(A) = A^t$

Ejercicio 12.- Sea $\mathbb{S} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - x_3 + x_4 = 0 \}$.

Definir una t.l. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{S} \subset \mathrm{Nu}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$ y $f(1,0,1,0) = (1,0,1,0)$.

Ejercicio 13.- Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la t.l. $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3, -x_1 + x_3, x_1)$.

Definir, si es posible, una t.l. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que:

$$f \neq 0 \quad , \quad f \circ g = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Nu}\, f + \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^4$$

Ejercicio 14.- Sean $\mathbb{S} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = x_1 + x_3 - x_4 = 0\}$ y

$\mathbb{T} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - x_2 - x_4 = 0\}$.

Definir una t. l. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente $\mathrm{Nu}\, f = \mathbb{S}$ y $\mathrm{Nu}\ f \circ f = \mathbb{T}$.

Ejercicio 15.- Definir un proyector p tal que

a) $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Nu}\, p = \langle(-1,2)\rangle$ e $\mathrm{Im}\, p = \langle(-1,1)\rangle$.

b) $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Nu}\, p = \langle(1,1,-2)\rangle$. ¿Es único?

c) $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\mathrm{Nu}\, p = \langle(1,1,1,1),(-1,0,1,1),(1,2,3,3)\rangle$, $\mathrm{Im}\, p = \langle(1,2,0,1),(-1,1,4,2)\rangle$

Ejercicio 16.- Escribir la matriz $M(f)$.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 4x_2 - 3x_3, x_1 + x_3)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2, x_1)$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(1,0,0) = (2,-3,1,1)$; $f(0,1,0) = (2,1,3,2)$; $f(0,0,1) = (0,-1,-2,1)$.

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(2,0,0) = (4,2,2)$; $f(0,4,0) = (1,1,1)$; $f(0,0,3) = (0,0,-1)$.

Ejercicio 17.- Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $M(f)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&2\\-2&0&-2\end{pmatrix}$.

a) Calcular $f(1, 2, 1)$; $f(5, 7, 2)$; $f(0, 0, 1)$.

b) Hallar bases de $\mathrm{Nu}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$.

Ejercicio 18.- En cada caso hallar $M_{BB'}(f)$.

a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$

B = B′ = E

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1)$

B = {(–1,0), (1,1)} B′ = {(1,1), (0,1)}

c) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3)$

B = {(1,–1,2), (0,2,–1), (0,0,1)} B′ = {(2,1), (1,–1)}

d) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, 2x_4, x_2 + x_3)$

B = {(1,–1,2,0), (0,2,–1,1), (0,0,2,1), (0,0,0,–1)} B′ = E

Ejercicio 19.- Sean B = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, B′ = $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3\}$ y B″ = {(1,–2,1), (0,1,1), (1,3,1)} bases de $\mathbb{R}^3$, y sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $f(\mathbf{v}_1) = (2,-3,2)$, $f(\mathbf{v}_2) = (0,2,3)$, $f(\mathbf{v}_3) = (1,2,0)$.

Hallar $M_{BE}(f)$, $M_{BB''}(f)$, $M_{B'E}(f)$ y $M_{B'B''}(f)$.

Ejercicio 20.- Sea $f:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ tal que $M_B(f)=\begin{pmatrix}1&4&-5\\2&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ y sean B = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y B′ = $\{-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2\}$ bases de $\mathbb{V}$. Hallar $M_{B'B}(f)$, $M_{BB'}(f)$ y $M_{B'}(f)$.

Ejercicio 21.- Sea $f:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ la t.l. definida por $f(X) = AX$ con $A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}$.

Calcular $M_E(f)$.

Ejercicio 22.- Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con

B = {(0,0,2), (0,1,–1), (2,1,0)} y B′ = {(1,0,0,0), (1,1,1,0), (1,–1,0,1), (0,1,1,1)}

a) Calcular $f\,(0,2,-1)$

b) Hallar una base de Im f y una base de Nu f.

Ejercicio 23.- Sea $p:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un proyector que no es idénticamente nulo y es distinto de la identidad. Probar que existe una base B de $\mathbb{R}^2$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 24.- Sea $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que la matriz de f en las bases B = {$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$} y B′ = {$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$} es $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular: $f\,(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_3)$; $f\,(\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4)$

b) Dar bases de Nu f e Im f.

c) Calcular $f^{-1}(\mathbf{w}_1)$

Ejercicio 25.- Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ con

B = {(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)} y B′ = {(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)}.

Hallar todos los valores de a para los cuales $f\,(1,2,1) = (0,1,-6)$.

Ejercicio 26.-

a) Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} k & 2 & 4 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$.

Encontrar todos los valores de k para los cuales f no es un monomorfismo.

b) Sean B = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$, y $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & a & -3 \end{pmatrix}$. Hallar todos los valores de a tales que f es isomorfismo.

Ejercicio 27.- Sea B = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$, y sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal

tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $2a^2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3a\mathbf{v}_3 \in \operatorname{Im} f$.

Ejercicio 28.- Sean B = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y B′ = $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.

Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar $M_{B'B}(f)$ y $M_{BB'}(f)$.

Ejercicio 29.- Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

con B = $\{(1,1,1),(0,1,-1),(0,0,-1)\}$ y B′ = $\{(1,-1,0),(0,0,1),(0,1,2)\}$.

Si $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$, hallar un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{T} \oplus f(\mathbb{S})$.

Ejercicio 30.- Sean B = $\{(1,-1), (1,2)\}$, B′ = $\{(1,1,-1), (1,-1,0), (-1,0,0)\}$ y las

transformaciones lineales $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $M_{B'E}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $M_{BB'}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar $M(f \circ f)$, $M_{BE}(g \circ h)$ y $M_{B'B}(f \circ g)$.

Ejercicio 31.- Sea B = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$} una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $f \circ f(3\mathbf{v}_1)$, $f \circ f(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2)$ y $f \circ f(\mathbf{v}_3)$

b) Hallar dim $\mathrm{Nu}(f \circ f)$ y dim $\mathrm{Im}(f \circ f)$ y dar una base de cada uno.

Ejercicio 32.- Sean B = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$} base de $\mathbb{V}$ y B′ = {$\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$} base de $\mathbb{W}$.

Sean $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ y $g : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ t.l. tales que:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_{BB'}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $g \circ f(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3)$.

b) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(g \circ f)$ y una base de $\mathrm{Im}(g \circ f)$.

Ejericio 33.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la t.l. dada por $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2)$.

a) Hallar $M(f^{-1})$

b) Hallar $M_{B'B}(f^{-1})$ con B = {(1,1), (2,1)} y B′ = {(–1,2), (0,1)}.

Ejercicio 34.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y sea

B = {(1,0,2), (0,1,1), (2,1,0)}. Hallar $M_{BE}(f)$, $M_B(f)$ y $M_{BE}(f^{-1})$.

Ejercicio 35.- Sean $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $g : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que

$M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con B = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$} y B′ = {$\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$} bases de $\mathbb{V}$.

Hallar $M_{BB'}(g \circ f)$, $M_{B'B}(g \circ f)$ y $M_{BB'}(g^{-1})$.

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Definir una t.l. $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

i) Nu $f \cap$ Im f = $\langle (1,1,1,1) \rangle$ ii) $(1,5,1,0) \in$ Im f iii) $(3,1,2,2) \notin$ Im f + Nu f.

2. Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ subespacios de $\mathbb{R}^3$ tales que dim $\mathbb{S}_1 = 1$, dim $\mathbb{S}_2 = 2$ y $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2 = \mathbb{R}^3$. Demostrar que si $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una t.l. tal que $f(\mathbb{S}_1) = \mathbb{S}_1$ y $f(\mathbb{S}_2) = \mathbb{S}_2$ y B = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$} es una base de $\mathbb{R}^3$ tal que {$\mathbf{v}_1$} es base de $\mathbb{S}_1$ y {$\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$} es base de $\mathbb{S}_2$, entonces

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \text{ con } a \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. Sea $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una t.l. que satisface:

$$f \circ f = 0 \quad ; \quad f(1,0,0,0) = (1,2,2,-1) \quad ; \quad f(0,1,0,0) = (0,-1,1,0).$$

Calcular $M(f)$.

4. Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $M(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & k \\ -8 & k & 2 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales Nu $f \neq \{0\}$ y Nu $f \subseteq$ Im f.

5. Sean $\mathbb{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \right\}$ y
$\mathbb{H} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x_1 - x_2 - x_4 = 0 \right\}$.

Hallar una transformación lineal $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

$f(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}$; Im $f = \mathbb{H}$; Nu$(f \circ f) = \mathbb{S}$.

6. Sean en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $\mathbb{S} = \langle (1,2,-1,2) \rangle$, $\mathbb{W} = \langle (0,2,3,2);(1,-1,1,2) \rangle$ y
$\mathbb{T} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$.

Definir, si es posible, un isomorfismo $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que satisfaga simultáneamente:

$f(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = \mathbb{S} + \mathbb{W}$; $f(\mathbb{S}) \cap \mathbb{S} = \{0\}$; $f(\mathbb{S}) \cap \mathbb{W} = \{0\}$.

7. Sea f: $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_3, -x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 + x_4, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3)$.
Definir, si es posible, una transformación lineal g: $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente: $\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im} f$ y $g \circ f = 0$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la t.l. dada por $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Hallar una base B_1 para Nu f y encontrar un conjunto B_2 de vectores de $\mathbb{R}^5$ tal que $B = B_1 \cup B_2$ es una base de $\mathbb{R}^5$.

b) Probar que los transformados de los vectores de B_2 por f, son linealmente independientes y extender este conjunto a una base B' de $\mathbb{R}^4$.

c) Calcular $M_{BB'}(f)$.

9. Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \langle (2,0,1,1); (1,1,1,1); (1,2,0,1) \rangle$
Definir, si es posible, una t. l. f: $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente
$f(\mathbb{S}) = f(\mathbb{T})$ y $\dim(\text{Nu } f) = 1$.

10. Sean en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $\mathbb{W} = \langle (1,0,-1,1); (1,1,0,-1) \rangle$ y
$\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$ y sea en $\mathbb{R}^3$ el subespacio $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$.
Definir, si es posible, una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga simultáneamente: $f(\mathbb{H}) = \mathbb{S}$; $f(\mathbb{W}) = \mathbb{S}^{\perp}$; $f(1,1,-1,1) = (2,-2,-3)$.

11. Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ y f: $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la t.l. dada por
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_1 - x_2, 2x_1 - x_2 - x_4)$.
Definir, si es posible, una t.l. g: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Nu}(f \circ g) = \langle(-1,0,2)\rangle$ e $\operatorname{Im} g = \mathbb{S}$.

12. Sean $B = \{(1,1,1); (1,1,0); (1,0,0)\}$ y $B' = \{(0,0,1); (0,1,1); (1,1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y sea
$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Calcular $f^{-1}(2,2,5)$.

13. Sea $B=\{(1,1,0,0);(0,1,1,0);(1,0,0,1);(0,0,0,1)\}$ y sea $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que $M_{BE}(f)=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&1&-1&0\\1&0&0&0\\b&-1&-1&-1\end{pmatrix}$.

Determinar a y b si se sabe que $f(2,3,1,-1)=(2,1,2,4)$ y $\dim(\operatorname{Nu} f)=1$.

14. Sean $B=\{\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_3\}$ y $B'=\{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3\}$ bases de un e.v. $\mathbb{V}$;

f: $\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f)=\begin{pmatrix}2&a&-1\\-1&0&3\\1&1&2\end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}=5\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$.

Determinar $a\in\mathbb{R}$ tal que $\dim(\operatorname{Im} f)=2$, y para el a hallado decidir si $\mathbf{v}\in\operatorname{Im} f$.

15. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$, con

$B=\{(1,1,1);(0,1,-1);(0,0,-1)\}$ y $B'=\{(1,-1,0);(0,0,1);\mathbf{v}\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.

Hallar $\mathbf{v}$ para que $f(0,0,-1)=(2,-3,-2)$ .Dar una base de $f(\mathbb{S})$, si $\mathbb{S}=\langle(-1,1,0)\rangle$.

16. Sean f: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_1-4x_2+x_3,2x_2-x_3)$ y g: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

la t. l. tal que $M_B(g)=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&3&-2\end{pmatrix}$, con $B=\{(0,0,-1);(1,-1,2);(0,1,3)\}$.

Calcular $f\circ g(3,-1,-3)$.

17. Sean $B=\{\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_3\}$ y $B'=\{-\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2\}$ bases de un e.v. $\mathbb{V}$ y sea

$f:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ la t.l. tal que $M_{BB'}(f)=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&1&-2\\-1&-3&3\end{pmatrix}$. Hallar una base de $\operatorname{Im}(f\circ f)$.

18. Sean $B=\{\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_3\}$ y $B'=\{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_3\}$ bases de un e.v. $\mathbb{V}$ y

$f:\ \mathbb{V}\to\mathbb{V}$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Hallar, si es posible, una base B'' de $\mathbb{V}$ tal que $M_{B''}(f)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

19. Sea $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ la t.l. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 - x_4, x_1 + x_2 + x_4, 2x_1 + x_2 + x_3)$.

Hallar una t.l. $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, no nula, que satisfaga simultáneamente:

$$f\circ g=0 \quad \text{y} \quad g\circ f=0\,.$$

20. Definir una transformación lineal f: $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

i) $\mathrm{Nu}\, f+\mathrm{Im}\, f=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / 3x_1-x_4=0\}$

ii) $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Nu}\, f$

iii) $f(1,2,0,1) = 2f(1,0,1,2) = -2f(0,0,0,1)$

21. Sean $\mathbb{S}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / -x_1+x_2+2x_4=x_2+x_3+3x_4=0\}$; $\mathbb{S}'=\langle(1,5,2,1),(0,2,2,2)\rangle$;

$\mathbb{T}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1-x_2=0\}$ y $\mathbb{T}'=\langle(1,2,0,0),(1,1,1,1),(1,0,0,0)\rangle$.

Definir una t.l. $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

i) $f(\mathbb{S})\subseteq\mathbb{T}$ ii) $f(\mathbb{S}')\subseteq\mathbb{T}'$ iii) $\dim f(\mathbb{S}+\mathbb{S}')=\dim(\mathbb{S}+\mathbb{S}')$

22. Sea f: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_3,x_1,x_2+x_3,x_2)$ y sean

$\mathbb{S}=\langle(1,0,1);(0,-1,1)\rangle$ y $\mathbf{v}=(1,3,-1)$.

Definir una t. l. g: $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ tal que $h=g\circ f$ satisfaga $h(\mathbf{v})\in\mathbb{S}$ y $\dim(\mathrm{Nu}\, h)=1$.

23. Sea g: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ la t.l. $g(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,3x_2-x_3)$

Definir un proyector p: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $g\circ p=0$.

24. Sea B={(2,1,–1); **v**; **w**} base de $\mathbb{R}^3$ y f: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M_{EB}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar **v** y **w** si se sabe que $f(6,-3,1)=(1,2,1)$ y $f(5,-2,1)=(1,-1,0)$.

25. Sea $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 / 2x_1-x_2=0\right\}$. Sea B={(1,1,1); (1,1,0); (1,0,0)} y $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ tal que

$$M_{BE}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8+a^2 & -8+a^2 & -8 \\ a-1 & a-1 & a \end{pmatrix}.$$

Hallar todos los valores de a para los cuales $\{f(0,1,2);\ f(-1,0,4)\}$ es base de $\mathbb{S}$.

26. Sean B = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_4$} una base de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{S}=<\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3>$ y $f:\mathbb{R}^4\rightarrow\mathbb{R}^4$ dada por

$$M_B(f)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$ Hallar la dimensión y una base de $f(\mathbb{S})\cap \text{Nu}\, f$.

27. Sea f: $\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ tal que $M(f)=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & k \\ -8 & k & 2 \end{pmatrix}$. Determinar todos los valores de k para los cuales es $\text{Nu}f\neq\{0\}$ y $\text{Nu}f\subseteq \text{Im}\, f$.

28. Sean B = {(1,1,0);(0,1,1);(0,0,1)} y f y g: $\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ dadas por

$g(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_3, x_1+x_2, x_2-x_3)$ y $M_B(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar $(f\circ g)^{-1}\left\langle(1,1,1)\right\rangle$.

29. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la t. l. tal que $M(f)=\begin{pmatrix}0&1&-2\\3&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

Hallar, si es posible, $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ y a,b,c reales tales que $B=\{\mathbf{v};\mathbf{w};(a,b,c)\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$ y $M_{BE}(f)=\begin{pmatrix}5&a&0\\5&b&0\\0&c&0\end{pmatrix}$.

30. Sean B = {(0,1,–1);(1,0,0);(1,1,0)}, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $M_{BE}(f)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ y $\mathbb{S}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 / 2x_1-x_2+5x_3=0\}$. Decidir si $f\circ f(9,7,2)\in\mathbb{S}$.

31. Sean B = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$} y B' = {$2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$, $2\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$} bases de $\mathbb{R}^3$, y f y g: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tales que $M_{B'B}(f)=\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&1&0\\3&1&2\end{pmatrix}$ y $M_{B'}(g)=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&3&2\\1&2&-1\end{pmatrix}$. Calcular $M_{B'}(f\circ g)$.

32. Sean $\mathbb{S}=\langle(-1,1,-1);(2,1,1)\rangle$ y $\mathbb{T}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 / -2x_1-x_2+3x_3=0\}$.

Definir un isomorfismo f: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $f(\mathbb{S})=\mathbb{T}$; $f(\mathbb{T})=\mathbb{S}$ y exista un vector $\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$ tal que $f^{-1}(\mathbf{w})=\frac{1}{3}\mathbf{w}$.

33. Definir una transformación lineal f: $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

$(1,-1,0,1)\in \mathrm{Nu}\, f$ y $\mathrm{Nu}(f\circ f)=\mathrm{Im}(f\circ f)$.