PRÁCTICA 6

NÚMEROS COMPLEJOS Y POLINOMIOS

NÚMEROS COMPLEJOS

Ejercicio 1.- Dar la forma binómica de z.

a) $z=(3-i)+(\frac{1}{5}+5i)$ b) $z=(\sqrt{2}+i)(\sqrt{3}-i)$ c) $z=(3+\frac{1}{3}i)(3-\frac{1}{3}i)+(3+2i)$

Ejercicio 2.- Dar la forma binómica de z.

a) $z=(1+2i)(1-2i)^{-1}$ b) $z=(1+i)(2+3i)\overline{(3+2i)}$

c) $z=(1+i)^{-1}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)+(-2+5i)$

Ejercicio 3.- Calcular $|z|$.

a) $z=(\sqrt{2}+i)+(3\sqrt{2}-3i)$ b) $z=(1+ai)(1-ai)^{-1}$ $a\in\mathbb{R}$

c) $z=(3i)^{-1}$ d) $z=\big||1-i|+i\big|+i$

e) $z=(1+i)(1-2i)(3-i)$ f) $z=3(1+3i)^{10}$

Ejercicio 4.- Dar la forma binómica de $\overline{z}$.

a) $z=|1-i|+i$ b) $z=\big||1+i|+i\big|+i$

c) $z=(1-2i)(2-i)$ d) $z=(1+3i)(1-3i)$

Ejercicio 5.- Representar en el plano todos los $z\in\mathbb{C}$ tales que:

a) $|z|=3$ b) $|z|\le 2$ c) $z=\overline{z}$

Ejercicio 6.-

a) Representar en el plano el conjunto $\mathrm{B}=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z+1-i|\le 2\}$.

b) Representar en el plano el conjunto $\mathrm{B}=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z+1|\le|z-3-i|\}$.

c) Si $\mathrm{A}=\{z\in\mathbb{C}\,/\,\mathrm{Re}\,z\le 1,\ \mathrm{Im}\,z\le\frac{1}{2}\}$ y $\mathrm{B}=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z-1-3i|=5\}$, representar $\mathrm{C}=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$.

Ejercicio 7.- Escribir en forma binómica todos los $z\in\mathbb{C}$ tales que:

a) $z^2=1-4\sqrt{3}i$ b) $z^2=16+14\sqrt{3}i$

c) $z^2+2z+3=0$ d) $z^2=5-2i\,z$

Ejercicio 8.- Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que su conjugado coincide con su cuadrado.

Ejercicio 9.- Calcular $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$.

a) $z = 2(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$ b) $z = 3(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi)$

c) $z = (\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi)$ d) $z = 2(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{4}\pi)$

Ejercicio 10.- Escribir z en forma trigonométrica.

a) $z = \sqrt{5}$ b) $z = -6$ c) $z = 15i$ d) $z = -\frac{1}{3}i$

e) $z = \sqrt{5} + \sqrt{5}i$ f) $z = 3 - \sqrt{3}i$

g) $z = -3(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$ h) $z = 3(\cos\frac{\pi}{2} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2})$

i) $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3})$ j) $z = \frac{\pi}{2}i(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2})$

Ejercicio 11.- Representar en el plano.

a) $A = \{z \in \mathbb{C} / \arg z = 0\}$ b) $B = \{z \in \mathbb{C} / \frac{1}{2}\pi \le \arg z \le \frac{5}{4}\pi\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 5,\ 0 \le \arg z \le \frac{2}{3}\pi\}$ d) $C = \{z \in \mathbb{C} / |z + 1 - i| \le 3,\ \frac{\pi}{6} \le \arg z \le \frac{\pi}{3}\}$

Ejercicio 12.-

a) Escribir en forma trigonométrica $z = (1+i)(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$

b) Escribir en forma binómica $z = (-3\sqrt{3} + 3i)^{15}$

c) Escribir en forma binómica $z = \dfrac{1+i}{(-\sqrt{3}+i)^5}$

Ejercicio 13.- Encontrar todas las raíces *n*-ésimas de *w* para:

a) $n = 3$ $w = 1$ b) $n = 5$ $w = -3$ c) $n = 4$ $w = -1 - \sqrt{3}i$

Ejercicio 14.- Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^8 = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$

Ejercicio 15.- Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

a) $z^3 = i\,\overline{z}^2$ b) $z^{10} = -4\overline{z}^{10}$ c) $z^5 - \overline{z} = 0$

d) $z^4 + z^{-4} = 0$ e) $z^3 + 9i\,\overline{z}^2\,|z| = 0$ f) $z^4 = (\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^8$

Ejercicio 16.-

a) Escribir en forma binómica $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2e^{-i\pi}$, $e^{i\frac{5}{6}\pi}$.

b) Expresar en forma exponencial las raíces quintas de -1.

c) Probar que $\forall t \in \mathbb{R}$ es $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ y $\operatorname{sen} t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

POLINOMIOS

Ejercicio 17.- Calcular PQ , $3P + Q$ y $P^2 - Q$ e indicar el grado de cada uno.

a) $P(x) = 2x + 1$ $\quad Q(x) = x^2 + 3x - 2$

b) $P(x) = 3x^2 + x - 1$ $\quad Q(x) = -9x^2 - 3x + 6$

c) $P(x) = x^3 - 3$ $\quad Q(x) = -x^3 + 2x^2 + 1$

Ejercicio 18.- Encontrar, si existen, a, b y c en $\mathbb{R}$ tales que:

a) $3x - 2 = a(x^2 + x + 3) + b(x^2 - 2x + 1) + c(x^2 - 3)$

b) $(2x - 1)(x + 1) = ax^2 + b(x + 1)(x + 3)$

Ejercicio 19.- a) Determinar $a \in \mathbb{R}$ tal que:

i) Si $P(x) = ax^3 - 3ax^2 + 2$, sea $P(2) = 3$

ii) Si $P(x) = x^3 + 3x^2 + a$, P tenga a cero como raíz

iii) Si $P(x) = ax^2 + ax + 3$, sea $P(-1) = 3$ y gr $P = 2$

b) Determinar a, b y c en $\mathbb{R}$ para que:

i) $P(x) = ax^2 + bx + c$ tenga a 1 y -1 por raíces

ii) $P(x) = x^2 + 2bx + a$ y $Q(x) = ax^3 - b$ tengan a 2 como raíz común.

Ejercicio 20.- Determinar todas las raíces de P.

a) $P(x) = x^2 + ix + 1$

b) $P(x) = x^2 + (1 - i)x + 1$

c) $P(x) = x^2 + 2x + 1$

d) $P(x) = ix^5 - 1$

Ejercicio 21.- Hallar todas las raíces de P.

a) $P(x) = 3x^3 + x^2 + 12x + 4$

b) $P(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \dfrac{2}{3}x - 7$

c) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$

d) $P(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - x - 10$ sabiendo que i es raíz

e) $P(x) = x^5 - 25x^3 + 85x^2 - 106x + 45$ sabiendo que $(2 + i)$ es raíz

f) $P(x) = x^4 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}$

g) $P(x) = x^6 - 2x^4 - 51x^2 - 108$ sabiendo que $P(-\sqrt{3}\, i) = 0$

Ejercicio 22.- Dado $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + ax + a$, determinar $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que $(1 + i)$ es raíz de P y hallar las restantes raíces de P.

Ejercicio 23.- Escribir $x^4 + 1$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$.

Ejercicio 24.- Determinar la multiplicidad de α como raíz de P.

a) $P(x) = (x^2 - 1)(x - 1)^3(x^5 - 1)$ $\quad \alpha = 1$

b) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 12x^2$ $\quad \alpha = 0$

c) $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$ $\quad \alpha = 2$

d) $P(x) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^3 + i)$ $\quad \alpha = i$

Ejercicio 25.- Hallar todas las raíces del polinomio P y escribirlo como producto de polinomios de grado 1.

a) $P(x) = x^5 - 6x^4 + 10x^3 + 4x^2 - 24x + 16$, y se sabe que P tiene una raíz triple.

b) $P(x) = 4x^3 + 8\sqrt{3}\,x^2 + 15x + 3\sqrt{3}$, y se sabe que P tiene una raíz doble.

Ejercicio 26.-

a) Hallar $P \in \mathbb{R}[X]$, de grado mínimo, que tenga a 1/2 como raíz simple, a $(1 + i)$ como raíz doble y que verifique que $P(0) = -2$.

b) Hallar todos los polinomios P con coeficientes reales, de grado 3, que tengan a (-2) como raíz doble y que verifiquen $P(1) = P(-1)$.

Ejercicio 27.- Sabiendo que $Q(x) = 81x^4 - 1$ y $P(x) = 9x^4 + 27x^3 - 8x^2 + 3x - 1$ tienen alguna raíz común, encontrar todas las raíces de P.

Ejercicio 28.- Sea $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1$, y sean a, b y c sus raíces.

Calcular: $\quad a+b+c \qquad abc \qquad a^2+b^2+c^2 \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Ejercicio 29.- Calcular la suma y el producto de las raíces séptimas de la unidad.

Ejercicio 30.-

a) Sea $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + \alpha$.

Encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la suma de dos de las raíces de P sea igual a -1.

b) Sea $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + \alpha$.

Encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que una de las raíces de P sea igual a la opuesta de otra.

c) $P(x) = 3x^3 + x^2 - 2x + \alpha$.

Encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que una de las raíces de P sea igual a la suma de las otras dos.

Ejercicio 31.-

a) Encontrar un polinomio P, de grado a lo sumo 3, que satisfaga:

$$P(1) = 1 \quad ; \quad P(0) = -1 \quad ; \quad P(2) = 2 \quad ; \quad P(-1) = 0$$

b) Encontrar la ecuación de una parábola que pase por P_1, P_2 y P_3, donde

$$P_1 = (-1,1) \quad ; \quad P_2 = (0,1) \quad ; \quad P_3 = (2,-2)$$

c) Encontrar un polinomio de grado 4 que satisfaga:

$$P(-1) = -1 \quad ; \quad P(0) = 1 \quad ; \quad P(1) = 4$$

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que:

a) $z^3 = 3iz\overline{z}$ b) $(1+\sqrt{3}i)z^3 = 2\overline{z}$

2. Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, tal que $|z| = 1$. Calcular $\mathrm{Im}(i\dfrac{1+z}{1-z})$.

3. Hallar un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$, de grado mínimo, que verifique:

$P(1+i) = 0$; -1 es raíz doble de P ; $\mathrm{Im}(P(i)) = 28$

4. Sea $P(x) = (x^3 - ax^2 - a^2x + 1)(x^2 - a^2)$. Hallar a para que -1 sea raíz doble de P.

5. Sean $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - 8x - 8$ y $Q(x) = x^3 - 1$. Se sabe que P y Q tienen al menos una raíz común. Hallar todas las raíces de P en $\mathbb{C}$.

6. Hallar un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$, de grado mínimo, que verifique simultáneamente: las soluciones de $z^2 = 5\overline{z}$ son raíces de P; P tiene alguna raíz doble; $P(1) = 31$.

7. Encontrar todas las raíces de $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 - 12x - 8$, sabiendo que tiene alguna raíz imaginaria pura.

8. a) Hallar todas las raíces sextas de $(1 + i)$

b) ¿Existe una raíz sexta de $(1 + i)$ cuyo conjugado sea también raíz sexta de $(1 + i)$?

c) Hallar el producto de todas las raíces sextas de $1 + i$.

9. a) Hallar el resto de la división de P por $(x - 3)(x + 2)$, si $P(3) = 1$ y $P(-2) = 3$

b) Calcular el resto de la división de $P(x) = x^n - 2x^{n-1} + 2$ por $x^2 + x$.

c) Los restos de dividir a $P(x)$ por $(x + 2)$, $(x - 3)$ y $(x + 1)$ son 3, 7 y 13 respectivamente. Calcular el resto de la división de $P(x)$ por $(x + 2)(x - 3)(x + 1)$

d) Calcular el resto de la división de $P(x) = (\cos a + x \operatorname{sen} a)^n$ por $x^2 + 1$.

10. Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ y $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x$. Hallar el resto de la división de P por Q sabiendo que $P(0) = -1$; $P(1) = 3$; $\partial P(1) = -3$.

11. Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^7 \overline{z}^3 = -2^{10} i$.

12. Hallar z_1 y z_2 tales que ambos sean soluciones de $(1-i)z^2 = (2+2i)\overline{z}$ y que además verifiquen $\operatorname{Re}(z_1) < 0$; $\operatorname{Im}(z_1 \cdot \overline{z}_2) > 0$.

13. Encontrar un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$ de grado mínimo que tenga por raíces a las soluciones de la ecuación $(2\operatorname{Im} z - i \operatorname{Re} z)^2 = -5 + 12i$.

14. Hallar un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$ de grado 4, que cumpla las siguientes condiciones:

i) el coeficiente principal de P es igual a 6 ii) $-1-i$ es raíz de P

iii) el cociente entre dos de sus raíces reales es igual a 4 iv) $P(0)=192$

15. Graficar los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^4 = (\overline{z})^4$ y $|\operatorname{Re}(z)| < 1$.

16. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^6 = i(\overline{z})^{-4}$ e $\operatorname{Im}(z^3) < 0$.

17. Hallar un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$, de grado mínimo, que tenga por raíces a todas las soluciones de la ecuación $z^4 \overline{z} = 2i|z|^4$.

18. Hallar todas las raíces de $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 10$ sabiendo que la suma de sus raíces reales es igual a cero.

19. Se sabe que el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8$ tiene alguna raíz imaginaria pura. Hallar todas las raíces de P y escribir P como producto de polinomios de grado 1.